

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO RIO GRANDE DO SUL - UERGS
MESTRADO PROFISSIONAL EM DOCÊNCIA PARA CIÊNCIAS, TECNOLOGIAS,
ENGENHARIA E MATEMÁTICA

LUCIANO BRASBIEL COIRO

SIMULADORES COMO OBJETO EDUCACIONAL ASSOCIADO A UMA PRÁTICA
PEDAGÓGICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Guaíba

2022

LUCIANO BRASBIEL COIRO

**SIMULADORES COMO OBJETO EDUCACIONAL ASSOCIADO A UMA PRÁTICA
PEDAGÓGICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Docência para Ciências, Tecnologias, Engenharia e Matemática da Universidade Estadual do Rio Grande do Sul, Unidade Guaíba, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Formação Docente para Ciências, Tecnologias, Engenharias e Matemática.

Orientadora: Prof.^a. Dr.^a. Tânia Cristina Baptista Cabral

Guaíba

2022

C679s Coiro, Luciano Brasbiel.

Simuladores como objeto educacional associado a uma prática pedagógica na educação matemática / Luciano Brasbiel Coiro. - Guaíba, 2022.
52 f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual do Rio Grande do Sul, Curso de Mestrado Profissional em Formação Docente para Ciências, Tecnologias, Engenharia e Matemática, Unidade Universitária em Guaíba, 2022.

Orientador: Prof.^a Dr.^a Tânia Cristina Baptista Cabral.

1. Simuladores. 2. Pensamento funcional. 3. Funções. I. Cabral, Tânia Cristina Baptista. II. Título.

LUCIANO BRASBIEL COIRO

**SIMULADORES COMO OBJETO EDUCACIONAL ASSOCIADO A UMA PRÁTICA
PEDAGÓGICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Dissertação, apresentado como requisito parcial ao título de Mestre em Formação Docente para Ciências, Tecnologias, Engenharias e Matemática na Universidade Estadual do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Prof.^a. Dr.^a. Tânia Cristina Baptista Cabral

Aprovada em _____/_____/_____

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Prof.^a. Dr.^a. Tânia Cristina Baptista Cabral
Universidade Estadual do Rio Grande do Sul – UERGS

Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende, docente
Universidade Federal Fluminense (UFF)

Prof. Dr. Luciano Andreatta Carvalho da Costa
Universidade Estadual do Rio Grande do Sul - UERGS

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente à minha orientadora, Prof.^a Dra. Tânia Cristina Baptista Cabral por sua dedicação, paciência, ensinamentos e orientações que foram essenciais para minha formação e concretização deste trabalho.

Agradeço aos professores que fizeram parte da banca, Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende e Prof. Dr. Luciano Andreatta Carvalho da Costa. Suas sugestões e considerações foram fundamentais para a realização do estudo.

Agradeço à minha esposa Prof.^a Mariela Bier Teixeira pelo estímulo, apoio e paciência concedida em diferentes momentos durante o curso de mestrado.

Agradeço à minha mãe Iara, meu irmão Adriano e minha afilhada Paola pelo incentivo e apoio dado durante esta trajetória. Ao meu pai (in memoriam) pelos seus ensinamentos os quais levarei eternamente.

Agradeço as minhas colegas de orientação Prof.^a Cássia I. F. Munhoz, Prof.^a Cristiane B. Fuchs, Prof.^a Clarice C. Taube e Prof.^a Gisele C. S. Alves pelo companheirismo e pela troca de experiências que oportunizaram um aprendizado compartilhado.

A todos os colegas mestrados por compartilharem comigo os desafios e as alegrias enfrentadas durante o curso, sempre com o espírito colaborativo.

A todos os professores do PPGSTEM da UERGS que contribuíram para meu crescimento intelectual, profissional e principalmente pela minha realização pessoal.

À Universidade Estadual do Rio Grande do Sul – UERGS por oportunizar a formação acadêmica a todas e todos de modo gratuito com excelência e qualidade de ensino.

“A regra da igualdade não consiste senão em
quinhoar desigualmente aos desiguais, na medida
em que se desigalam.”

Barbosa (1997, p.26)

RESUMO

Esse trabalho apresenta estudos sobre Simuladores como Objeto Educacional Associado a uma Prática Pedagógica na Educação da Matemática. Foram investigadas as possibilidades de uma sequência didática auxiliar a prática docente relativa ao desenvolvimento do pensamento funcional dos alunos. Em última instância, foi visado o estudo de funções. Resultou desses estudos a produção de uma sequência didática em que as atividades foram desenvolvidas com auxílio de objetos educacionais e baseadas em referenciais teóricos sobre o pensamento funcional. A pesquisa qualitativa compreendeu a análise comparativa de estudos que apresentam o mesmo tema das atividades propostas na sequência didática deste trabalho, apresentada no apêndice. Para o levantamento de dados, foi realizada uma pesquisa bibliográfica de Produtos Educacionais que apresentam estratégias similares aos das atividades propostas neste trabalho, assim permitindo uma relação entre elas. A análise dos dados, em um primeiro momento, concentrou-se nos principais resultados e percepções dos trabalhos pesquisados, relativos ao desenvolvimento das atividades, observando as considerações dos autores sobre as estratégias de ensino adotadas em suas pesquisas. Em um segundo momento, foi realizada uma relação entre as atividades pesquisadas e as desenvolvidas para este trabalho promovendo uma reflexão. Assim, por meio das reflexões e debates construídos entre pares, consideramos que as atividades podem ser promissoras para o desenvolvimento do pensamento funcional dos alunos, procurando dar sentido ao estudo de funções.

Palavras-chave: Simuladores; Pensamento funcional; Funções

ABSTRACT

This work presents studies on Simulators as an Educational Object Associated with a Pedagogical Practice in Mathematics Education. The possibilities of a didactic sequence to help the teaching practice related to the development of students' functional thinking, were investigated. Ultimately, the study of functions was aimed. These studies resulted in the production of a didactic sequence in which the activities were developed with the help of educational objects and based on theoretical references on functional thinking. The qualitative research comprised the comparative analysis of studies that present the same theme of the activities proposed in the didactic sequence of this work, presented in the appendix. For data collection, a bibliographic research was carried out on Educational Products that present strategies similar to the activities proposed in this work, thus allowing a relationship between them. The data analysis, at first, focused on the main results and perceptions of the researched works, related to the development of activities, observing the authors' considerations about the teaching strategies adopted in their research. In a second moment, a relationship was made between the researched activities and those developed for this work, promoting a reflection. Thus, through reflections and debates between peers, we consider that the activities can be promising for the development of students' functional thinking, trying to make sense of the study of functions.

Keywords: Simulators; Functional thinking; Functions.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
1.1 PROBLEMA DE PESQUISA	13
1.2 JUSTIFICATIVA	14
1.3 OBJETIVOS	15
1.3.1 <i>Objetivo Geral</i>	15
1.3.2 <i>Objetivos específicos</i>	15
2 PENSAMENTO FUNCIONAL.....	16
2.1 FUNÇÃO: CONCEITO, DEFINIÇÕES E CONCEPÇÃO	23
3 ENSINO E APRENDIZAGEM: REFLEXÕES A CERCA DE UMA ABORDAGEM METODOLOGICA.....	27
3.1 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA.....	27
3.2 ATUAÇÃO DOCENTE	29
3.3 DISPOSITIVO TECNOLÓGICO COMO OBJETO DE APRENDIZAGEM (AO)	30
3.4 MODELO DIDÁTICO.....	33
4 METODOLOGIA DE PESQUISA	35
5 PRODUTOS EDUCACIONAIS E A RELAÇÃO COM A PROPOSTA DAS ATIVIDADES DESTA DISSERTAÇÃO.....	37
5.1 ATIVIDADE: O JOGO BATALHA NAVAL.....	38
5.1.1 <i>Descrição da atividade</i>	38
5.1.2 <i>Estudo relacionado a atividade proposta no PE</i>	38
5.2 ATIVIDADE: MEU BAIRRO NO PLANO CARTESIANO.....	39
5.2.1 <i>Descrição da atividade</i>	39
5.2.2 <i>Estudo relacionado a atividade proposta no PE</i>	40
5.3 ATIVIDADE: COMO B DEPENDE DE A.....	40
5.3.1 <i>Descrição da atividade</i>	40
5.3.2 <i>Estudo relacionado a atividade proposta no PE</i>	41
5.4 ATIVIDADE: ANÁLISE DAS RELAÇÕES ENTRE VARIÁVEIS UTILIZANDO UM SIMULADOR TÁTIL.....	42
5.4.1 <i>Descrição da atividade</i>	42
5.4.2 <i>Estudo relacionado a atividade proposta no PE</i>	43
5.5 ATIVIDADE: CONSTRUTOR DE FUNÇÕES.....	44
5.5.1 <i>Descrição da atividade</i>	44
5.5.2 <i>Estudo relacionado a atividade proposta no PE</i>	45
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	48
REFERÊNCIAS	51

LISTA FIGURAS

Figura 1 - Mapa conceitual da dissertação	13
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC- Base Nacional Comum Curricular

IEEE - Institute of Electrical and Electronic Engineers.

LTSC - Learning Technology Standards Committee.

OA - Objeto de Aprendizagem.

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais.

PE - Produto Educacional.

PhET - Physics Education Technology.

SEI - Sequência de Ensino Investigativo.

TD - Tecnologia Digital.

TICs - Tecnologia de Informação e Comunicação.

TDIC - Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação.

UFF – Universidade Federal Fluminense.

INTRODUÇÃO

Uma metodologia contemporânea que utilize recursos que estejam inseridos no convívio do educando pode ser um diferencial no aprendizado da Matemática. Nesse sentido, deve-se repensar a sala de aula como um espaço interativo e colaborativo no qual o sujeito seja protagonista no seu processo de aprendizagem, para que o aprendizado de Matemática não se torne desestimulante e cansativo.

Considerando a aprendizagem do conceito de função, é relevante que sejam desenvolvidas estratégias de ensino de modo que os alunos investiguem as relações de covariação de variáveis. Ainda, é considerável desenvolver essas estratégias com alunos do nível básico de ensino, prevenindo que esses encontrem dificuldades em estudos futuros que tratem sobre funções. Nesse sentido, é relevante que a estratégia adotada para abordagem do estudo de funções possibilite ao aluno o raciocínio covariacional, promovendo um suporte para o desenvolvimento de regras de correspondência entre variáveis. Da mesma forma, é pertinente que a estratégia didática elaborada favoreça um aprendizado significativo, levando em conta o conhecimento prévio do aluno, utilizando informações/recursos que pertençam ao seu meio, e que o estudo favoreça a disposição do aluno para a aprendizagem. O uso de recursos didáticos tecnológicos inseridos nas estratégias de ensino pode favorecer a aprendizagem, conforme Pichardo e Puente (2012):

As TICs podem ajudar os estudantes a aprender Matemática, permite-lhes melhor compreensão, descobrir por si mesmos os conceitos e, portanto, desenvolvem neles uma aprendizagem significativa e as competências desejadas. E ainda que as TICs não são a solução das dificuldades no processo de ensino aprendizagem da Matemática, abrem um espaço que os estudantes podem manipular de maneira direta os objetos matemáticos e suas relações. Permitindo-lhes construir uma visão mais ampla e profunda do conteúdo matemático. (PICHARDO e PUENTE, 2012, p. 142)¹

A fim de dissertar e sustentar teoricamente as reflexões apontadas acima, esta dissertação apresenta dois capítulos: Pensamento Funcional; Ensino e Aprendizagem: Reflexões acerca de uma abordagem Metodológica.

¹Las TIC puede ayudar a los estudiantes a aprender matemáticas, les permite mejor comprensión, descubrir por sí mismos conceptos y por ende desarrolla en ellos un aprendizaje significativo y las competencias deseadas. Y aunque las TIC no son la solución de las dificultades en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, le abren un espacio en el que los estudiantes pueden manipular de manera directa los objetos matemáticos y sus relaciones. Les permite construir una visión más amplia y profunda del contenido matemático.

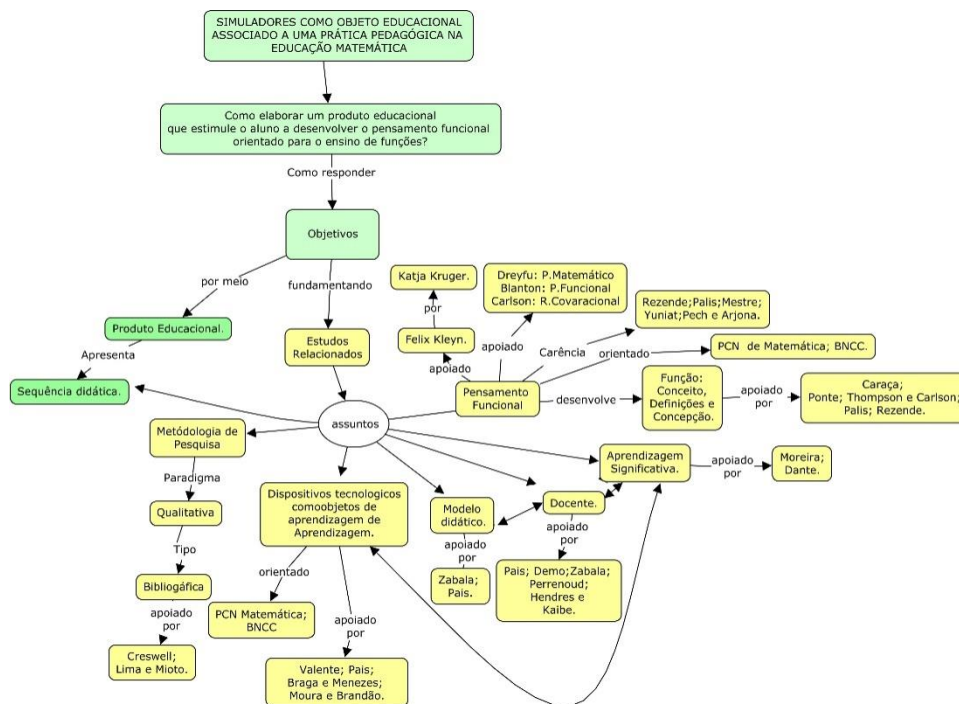
Ainda, neste estudo apresenta-se um levantamento de PE destinados ao ensino de funções com o intuito de estabelecer uma comparação entre estes e o PE anexo nesta dissertação. O PE, que é apresentado no apêndice, é uma sequência didática associada a dispositivos tecnológicos que pretendem estimular o desenvolvimento do pensamento funcional, procurando contribuir para o ensino e aprendizagem de funções.

A pergunta inicial que desencadeou a investigação foi: "Como elaborar um produto educacional que estimule o aluno a desenvolver o pensamento funcional orientado para o ensino de funções?". Com o objetivo de responder essa pergunta, foi realizada uma busca de PE que empreguem estratégias de ensino semelhantes ao desta dissertação, a fim de propor uma comparação com o PE elaborado para esta dissertação.

Como aporte teórico, apresenta-se a problematização do pensamento funcional, discutida por Krüger (2019), relacionando com trabalhos que analisam esta problemática em tempos atuais, apresentado por Palis (2013), Neto e Rezende (1998), Rezende *et al.* (2016), Mestre (2014), Yuniat *et al.* (2019) e Pech e Arjona (2010) além de documentos norteadores educacionais. No estudo sobre Função, Ponte (1990), Caraça (1951) e Thompson & Carlson (2017) subsidiam as reflexões do pesquisador. Além disso, apresenta-se uma reflexão sobre aprendizagem significativa, subsidiado por Moreira (2011), a didática da matemática referenciando Pais (2011), competências para ensinar por Perrenoud (2000), e dispo de Zabala (2014) como referência para a reflexão sobre sequência didática. A metodologia de pesquisa adotada é qualitativa, fundamentada por Creswell (2007) e Lima e Miotto (2007), seguindo os seguintes procedimentos metodológicos: 1) Levantamento documental e bibliográfico delineando a fundamentação teórica; 2) Desenvolvimento da sequência didática; 3) Levantamento de PE que objetivam o desenvolvimento do pensamento funcional; 4) Análise e considerações das comparações realizadas entre os PE pesquisados e o PE elaborado nesta dissertação.

No apêndice, encontra-se o PE elaborado para esta dissertação.

Figura 1 - Mapa conceitual da dissertação



Fonte: Autor (2022).

1.1 PROBLEMA DE PESQUISA

Na prática da docência em Matemática, eventualmente depara-se com perguntas de alunos sobre quais as circunstâncias do seu dia a dia o conteúdo estudado está inserido ou será aplicado. A incompreensão dos alunos em relacionar o assunto estudado com fatos que pertençam a sua vivência pode promover um sentimento de descaso com o estudo. Por vezes, estratégias de ensino não possibilitam a observação e a relação da Matemática no cotidiano do estudante. Nesse sentido, é significativo refletir sobre os modelos de ensino e aprendizagem da Matemática, propondo estratégias que contextualizem os conceitos matemáticos com ações do cotidiano do aluno, conforme Pacheco e Andreis (2018) “a contextualização da Matemática é um processo considerado sociocultural, que consiste em entendê-la como um conhecimento do cotidiano, indo muito além de meras aplicações dos conteúdos. (TOMAZ e DAVID, 2008 apud PACHECO E ANDREIS, 2018, p. 108). Assim, uma sequência didática que contextualize o estudo da matemática pode ajudar os alunos identificarem a matemática no seu dia a dia, incentivando-os ao estudo.

Levando em consideração a reflexão acima, apresentamos a questão orientadora da pesquisa: Como elaborar um produto educacional que estimule o aluno a desenvolver o pensamento funcional orientado para o ensino de funções?

1.2 JUSTIFICATIVA

No ensino básico, percebe-se a dificuldade dos alunos no estudo da Matemática. Essa situação incentivou a busca de respostas que expliquem esse sentimento dos alunos. Ogliari (2008) analisa a perspectiva dos alunos a respeito da Matemática no contexto da sociedade em que está inserido e descreve que a Matemática vem sendo demonstrada desconexa do cotidiano dos alunos, logo esses sujeitos não percebem a aplicabilidade da Matemática na sua vida:

A Matemática é candidata a tornar-se cada vez mais distante de seus significados e objetivos na Educação Básica, pela forma como vem sendo vista por grande parte das pessoas, ou seja, como uma ciência isolada e desconexa do cotidiano. Essa crença faz com que a Matemática se restrinja ao universo dos cientistas e especialistas, sendo uma ferramenta que, aparentemente, não serve para a vida dos estudantes. (OGLIARI, 2008, p. 19).

Deste modo, é pertinente fazer uma reflexão sobre o ensino da matemática. Propor ações que motivem os alunos a construir seus conhecimentos por meio de estratégias que associem conceitos matemáticos a fatos que pertençam a sua vida prática. Essas ações tendem a aproximar a matemática à sua vivência, promovendo um significado para o estudo, conforme Pais (2001), “O valor educacional de uma disciplina expande na medida em que o aluno compreende os vínculos do conteúdo estudado com um contexto compreensível por ele.” (PAIS, 2001, p. 27).

Com o objetivo de apresentar uma proposta didática que permita o aluno a construir seus conhecimentos de modo significativo, esta dissertação apresenta uma análise de um PE que compõe: atividades matemáticas relacionadas a fatos do cotidiano; atividades que estimulem pensamento funcional por meio de recursos tecnológicos, com o intuito de oportunizar aos alunos o emprego das habilidades desenvolvidas neste processo em problemas futuros. Almeja-se que as estratégias apresentadas sirvam de apoio a outros educadores, pois o PE apresentado pode ser ajustado para o perfil do público a ser atingido.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Neste trabalho, propõe-se, como objetivo principal analisar um conjunto de atividades desenvolvidas com auxílio de recursos tecnológicos com a finalidade de constatar como este material pode auxiliar o desenvolvimento do pensamento funcional do aluno, visando o estudo de funções. As atividades mencionadas estão organizadas de maneira sistemática e articuladas constituindo uma sequência didática, um Produto Educacional (PE).

1.3.2 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral, propomos o desdobramento em outros que, no seu conjunto, possibilitarão responder as inquietações que nortearam essa pesquisa.

- Discutir estudos sobre o pensamento funcional, estudos que apresentam as dificuldades encontradas por alunos no estudo de funções e conceitos que estão relacionados a este pensamento.
- Discutir sobre o ensino e aprendizagem de funções orientada pelo desenvolvimento do pensamento funcional.
- Correlacionar propostas de trabalhos disponíveis em repositórios educacionais a fim de fazer uma reflexão com a posposta desta dissertação.

Na próxima seção, apresentar-se-ão reflexões que abordam o assunto ‘pensamento funcional’, estudos que discutem as dificuldades encontradas por alunos no estudo de funções, a definição de raciocínio covariacional e o pensamento matemático.

2 PENSAMENTO FUNCIONAL

Quais estratégias podem ser utilizadas para promover o aprendizado de função? Qual pensamento e quais habilidades pretende-se que o aluno desenvolva a fim de promover um aprendizado significativo para o estudo de funções? Na busca de responder a essas questões, neste texto apresenta-se uma reflexão sobre o pensamento funcional.

Ao desenvolver ações para o ensino e aprendizagem da Matemática é preciso definir estratégias que permitam aos alunos desenvolverem habilidades. Logo, é interessante que se disponha de um material apropriado, que esteja associado aos conhecimentos prévios dos alunos. Ainda, o interesse do aluno é essencial para aprendizagem significativa, pois é preciso que ele seja capaz de relacionar os novos conhecimentos aos seus conhecimentos prévios, conforme Moreira (2011).

É considerável pensar em intervenções pedagógicas que permitam aos alunos acionar seus conhecimentos prévios a fim de promover a relação com novos conceitos, permitindo a reflexão e novas concepções com o intuito que o aluno assimile o estudo de funções como a relação entre variáveis. Neste sentido, é relevante estabelecer atividades que promovam os conhecimentos prévios e desenvolva o raciocínio covariacional dos alunos para o estudo de função. Carlson *et al.* (2002) definem raciocínio covariacional como: “nós definimos raciocínio covariacional como sendo as atividades cognitivas envolvidas na coordenação de duas quantidades variáveis, ao mesmo tempo em que observamos as maneiras pelas quais elas mudam em relação uma à outra.” (CARLSON *et al.*, 2002, p. 354, tradução nossa)². Assim, propor atividades que permitam ao aluno observar, analisar e interpretar uma situação do cotidiano na qual há variação entre duas quantidades, de modo a perceber que uma delas varia em relação à outra, permitirá uma concepção significativa de função.

Desenvolver ações orientadas pelas reflexões acima tendem a ser uma estratégia para suprir a defasagem na compreensão de função apresentada por alunos. Esta defasagem vem sendo discutida em estudos como o de Palis (2013), Neto e Rezende (1998), Rezende *et al.* (2016), Mestre (2014), Yuniat *et al.* (2019) e Pech e Arjona (2010) que objetivam o ensino de funções.

Krüger (2019), em seu estudo, apresenta a reforma ocorrida no ensino da Matemática na Alemanha no início do século XX, no qual surgiu o movimento chamado de Reforma Kleinsche ou Meraner. Esta reforma teve o propósito de mudanças na Educação Matemática

² we define covariational reasoning to be the cognitive activities involved in coordinating two varying quantities while attending to the ways in which they change in relation to each other. (CARLSON *et al.*, 2002, p. 354)

na Prússia em 1905, liderado por Felix Klein. Com o lema Pensamento Funcional na Educação, a reforma tinha como objetivo principal introduzir o conceito de função como tema central na educação básica, com o objetivo de suprir déficit na aprendizagem apresentado por estudantes que ingressavam nas universidades. A seguir, apresentam-se reflexões sobre trabalhos que trazem discussões a respeito deste tema.

Palis (2013) inicia com uma reflexão sobre a dificuldade dos alunos em relação ao conceito de função. Descreve que alunos em transição do Ensino Médio para o Ensino Superior acreditam que o estudo de funções pode ser definido somente por fórmulas algébricas, pensam que o estudo de função é somente a manipulação simbólica e numérica, desassociada do seu aspecto conceitual. Segundo a autora, entender o estudo de funções como fórmula tende a dificultar o aluno em diferenciar variável de incógnita, função de equação, e entender que o estudo de função não é apenas o desenvolvimento de operações matemáticas a fim de determinar o domínio de uma função. Esta percepção predomina aspectos procedimentais e o desenvolvimento de aspectos conceituais é bastante limitado. (CARLSON, 1998 apud PALIS, 2013, p.1). A autora relata que há estudos que enfatizam a importância de incluir estratégias que visem o estudo de conceito de função como covariação de quantidades e não somente como correspondência a fim de evitar um estudo desenvolvido por procedimentos. Para isso, é importante que as ações propostas para o aprendizado de função envolvam conceito de função como covariação. Ainda, descreve que um estudo realizado com diferentes representações pode estabelecer uma associação entre as representações envolvidas favorecendo o aprendizado.

Neste sentido, a autora sugere uma proposta de atividade que possibilite o aluno a desenvolver o raciocínio covariacional para o estudo função por meio de representações gráficas e um problema de otimização. As diferentes representações proporcionam a interpretação qualitativa de aspectos covariacionais da situação funcional, permitindo que o aluno perceba a situação de variação de quantidade entre as variáveis.

Neto e Rezende (1998) analisaram dois grupos de alunos universitários, um grupo de estudantes de engenharia e outro de alunos de Licenciatura em Matemática, por meio de um questionário procurando identificar qual a interpretação do conceito de função destes entrevistados. Conforme os autores, o questionário foi elaborado a fim de analisar o entendimento que os alunos têm do conceito de função por meio de cinco questões organizadas de modo que: As três primeiras perguntas têm o objetivo de sondar a concepção de função do aluno da seguinte maneira: a primeira questão os alunos tinham que enumerar

tipos de função; segunda questão solicitava exemplos de funções; a terceira questão solicitava que os alunos elaborassem definições e interpretações do conceito de função. A quarta questão tem o objetivo de avaliar a coerência do aluno com a definição apresentada por ele na questão anterior. A quinta questão foi elaborada com o objetivo de verificar se o aluno consegue construir funções a partir de situações-problema, envolvendo áreas de figuras planas, estabelecendo relações entre as quantidades variáveis. Os autores analisam os resultados obtidos por cada grupo em cada pergunta, em seguida apresentam as seguintes considerações. Ambos os grupos apresentam a definição formal de função como a relação entre conjuntos, uma definição estática que é descartada no momento de exemplificar. Os entrevistados deixam de estabelecer uma relação entre conjuntos e escrevem como um alei de formação ou uma expressão analítica, ainda apresentam dificuldades em determinar o domínio e o contradomínio das funções. Os autores destacam que a ideia de função como relação de quantidades que variam não é mencionada pelos Licenciandos em Matemáticas, salientando que esta é uma abordagem desenvolvida em disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática para o conceito de função. Os autores concluem que com os resultados apresentados deve-se repensar modo de apresentar o conceito de função, resgatando um modo mais dinâmico do conceito, procurando relacionar este conceito com situações do cotidiano.

Observa-se no estudo de Neto e Rezende (1998) que a maioria dos alunos identifica a definição formal de função como relação entre conjuntos, assim é relevante propor estratégias para o ensino de funções que permitam aos alunos identificá-las por diferentes representações. É considerável que os alunos tenham a concepção do conceito de função como covariação de quantidades, assim permitindo que os alunos identifiquem as variáveis e as relações que envolvem este estudo. Essa concepção pode prevenir dificuldades de aprendizagem em estudos futuros, assunto discutido na próxima seção.

Rezende *et al.* (2016) apresenta uma proposta de um minicurso, com o propósito de contribuir para o saber pedagógico de conteúdo do professor de matemática no que diz respeito a compreensão do conceito de função, estruturado da seguinte maneira: Assuntos: Sequências numéricas; Caracterizações das funções afim, quadrática e exponencial; Problemas de otimização. Recursos: GeoGebra e Planilha Excel. Entre os objetivos, destaca-se: reconhecer o comportamento variacional de algumas funções. Os autores justificam a proposta do minicurso por meio de estudos que apresentam dados indicativos que, além de alunos da educação básica, há professores com dificuldades da compreensão do conceito de função como a variação quantitativa de variáveis. Conforme Rezende *et al.* “os professores

não dispõem de recursos que permitam qualificar e quantificar o comportamento variacional de uma função real.” (REZENDE *et al.*, 2016, p. 2). Este episódio apresenta a mesma problemática exposta no estudo de Krüger (2019), sendo que, neste caso, trata-se de sujeitos já licenciados em Matemática. Desse modo, é relevante desenvolver uma didática que desenvolva o pensamento funcional do aluno de modo que ele seja capaz de perceber as relações quantitativas das variáveis de uma função no ensino básico, assim evitando a carência deste conceito em estudos futuros.

Mestre (2014) apresenta em seu trabalho de que maneira os alunos 4º ano de escolaridade generalizam/apresentam suas ideias matemáticas, numa perspectiva do pensamento algébrico, por meio de tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento relacional e do pensamento funcional. Diante deste objetivo, a autora apresenta uma reflexão sobre o pensamento funcional apoiando-se em Smith (2008):

Smith (2008) refere-se ao pensamento funcional como o pensamento representacional que se foca nas relações entre duas (ou mais) quantidades que variam, e mais especificamente, como o tipo de pensamento que conduz das relações específicas para a generalização dessas relações. (SMITH, 2008 apud MESTRE, 2014, p.71)

Segundo a autora, a generalização é desenvolvida pelo aluno a partir da faculdade de pensar, relacionar duas ou mais de quantidades que variam. Esta ação ocorre quando o aluno está comprometido numa atividade e observa com atenção as quantidades que variam e atenta-se nas relações que se apresentam. Assim, é relevante propor ações de ensino que estimule o aluno ao estudo a fim de proporcionar o interesse colocando-o como agente do seu aprendizado.

Yuniat *et al.* (2019) buscaram em seu estudo verificar de que maneira os alunos desenvolvem o pensamento funcional e de que maneira eles representam este pensamento. Os autores definem o pensamento funcional como: “O pensamento funcional é desenvolvido quando alguém realiza uma atividade de modo a observar duas ou mais quantidades variantes e, em seguida, focando na relação entre as quantidades.” (YUNIAT *et al.*, 2019, p. 672)³. Ainda, os autores apoiam-se em Smith (2008 apud YUNIAT *et al.*, 2019, p. 672) descrevendo que a relação entre quantidades está centrada no conceito de função, e concluem que o pensamento funcional está relacionado ao conceito de função. Desta maneira, pensar, analisar

³ Functional thinking is implemented when someone performs an activity of choosing in observing two or more variant quantities and then focusing on the relationship between the quantities.

a relação entre variáveis de modo covariacional tende significar o estudo de funções de modo que os alunos estabeleçam estratégias adequadas para resolução de problemas futuros.

Pech e Arjona (2010) em seu estudo apontam que o método predominante para abordagem do conceito de função, no ensino médio, não propicia a compreensão deste conceito, pois incentiva a memorização e a utilização de passos, procedimentos procurando solucionar problemas, conforme os autores:

[...]o conceito de função é apresentado como uma correspondência entre dois conjuntos, apresentando representações numéricas, gráficas e algébricas e, por outro lado, que alunos e professores apresentam dificuldade conceitual ao trabalhar com o conceito de função, em particular, não distinguem adequadamente função de equação. (PECH E ARJONA, 2010, p. 15 tradução nossa)⁴

Ter o entendimento do conceito de função como a correspondência entre dois conjuntos de modo arbitrário tende promover dificuldades em estudos futuros, os quais os alunos devam observar e analisar as relações existentes nas variáveis e entre variáveis.

Mas o que é considerado pensamento funcional? Conforme Blanton (2015), “O pensamento funcional envolve generalizar relações entre quantidades covariáveis e representar e raciocinar com essas relações por meio da linguagem natural, notação algébrica (simbólica), tabelas e gráfico”. (BLANTON *et al.*, 2015, p. 43, tradução nossa.)⁵, portanto é o pensamento que permite assimilar padrões de relacionamento entre variáveis quantitativas. Ainda, Krüger (2019) apresenta a característica do princípio do pensamento funcional mencionada por Schotten (1909):

Considerando primeiro o pensamento funcional, ele nem sempre foi entendido como deveria ser. Trata-se de tornar os alunos conscientes da variabilidade das quantidades em contextos aritméticos ou geométricos e da sua dependência partilhada e relação mútua, e habituá-los a observar a “vitalidade” das quantidades e a empenhar-se na contemplação da “variável”. (SCHOTTEN 1909, p. 97 apud KRÜGER, 2019, p. 39, tradução nossa)⁶.

⁴ ...el concepto función se presenta con una correspondencia entre dos conjuntos, planteando representaciones numéricas, gráficas y algebraicas y por otra parte, que estudiantes y profesores, muestran dificultad conceptual al trabajar con el concepto función, particularmente, no distinguen apropiadamente función de ecuación.

⁵ Functional thinking involves generalizing relationships between covarying quantities and representing and reasoning with those relationships through natural language, algebraic (symbolic) notation, tables, and graph (BLANTON *et al.*, 2015, p. 43).

⁶ Considering functional thinking first, it has not always been understood as it was meant to be. It is about making students aware of the variability of quantities in arithmetic or geometric contexts and of their shared dependence and mutual relationship and getting them accustomed to observing the “vitality” of quantities and to engaging in contemplating the “variable”. (Schotten 1909, p. 97; own translation, for original see Appendix 3).

Conforme a reflexão do Schotten, o pensamento funcional deve ser estimulado, a fim desenvolver um pensamento que permita generalizar as relações entre variáveis, habilitando o estudante a representar e justificar estas relações por meio do raciocínio covariacional para prever o comportamento funcional das variáveis envolvidas.

Para o estudo de funções, o pensamento funcional tende promover ao aluno a habilidade em desenvolver práticas mentais que possibilite a construção de modelos estabelecendo conjecturas, desenvolvendo e argumentando relações matemáticas. Assim, entende-se que as estratégias para o ensino de funções devam ser elaboradas com intuito de promover o pensamento funcional do estudante de modo que envolvam seus conhecimentos prévios; estimule a percepção das relações existentes entre variáveis; desenvolva a habilidade em construir e sistematizar analogias em diferentes representações promovendo reflexões.

Esses propósitos vêm sendo discutido nos documentos norteadores educacionais do Brasil, nos Parâmetros Curriculares Nacionais da seguinte maneira:

O ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa. (BRASIL, 1998, p. 56)

De forma específica, o PCN aqui datado em 1998 já apresentava a importância do desenvolvimento de diversos raciocínios para o aprendizado da Matemática. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que regulamenta a elaboração dos currículos escolares de todas as redes de ensino, apresenta área/componente Matemática e suas tecnologias divididas em campos de conhecimentos que estão interligados a um conjunto de ideias fundamentais que articulam entre si e que são relevantes para o desenvolvimento do pensamento matemático. Essas ideias são: a equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Conforme a BNCC (2018, p. 268) estas representações são significativas para o desenvolvimento do pensamento matemático “Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento.”, assim, a proposta é que estas ideias estejam inseridas nas unidades temáticas⁷ apresentadas pela BNCC, assim promovendo o desenvolvimento do pensamento matemático aos estudantes.

⁷Unidades temáticas conforme a BNCC: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e Estatísticas.

As ações propostas acima são associadas ao pensamento matemático. Sobre o pensamento matemático, Dreyfus (2002) apresenta no seu estudo os processos que envolvem o pensamento matemático avançado. Descreve que apresentar definições de conceitos matemáticos abstratos aos alunos não proporcionará o seu aprendizado. O processo de aprendizado parte da ação do aluno, construindo propriedades dos conceitos por meio das deduções de definições. Estas deduções são desenvolvidas por meio do pensamento matemático, que consiste na interação entre processos de Representação e Abstração, os quais apresentam as seguintes subdivisões: Processos envolvidos na Representação: Simbólica, Mental, Visualização, Mudança de Representação e Modelação; Processos envolvidos na abstração: Generalização e Sintetização. Dreyfus (2002, p. 34 e seg.).

O mesmo autor descreve que estes processos podem ser desenvolvidos no pensamento matemático elementar e no pensamento matemático avançado, salientando que não há uma diferença explícita nos processos entre esses pensamentos: “Não há distinção nítida entre muitos dos processos do pensamento matemático elementar e avançado, embora a matemática avançada seja mais focada nas abstrações de definição e dedução.” (DREYFUS, 2002, p. 26, tradução nossa)⁸. Também trata que o processo de desenvolvimento do pensamento elementar para o pensamento avançado pode estar associado à experiência do sujeito. Ainda, destaca que os processos de representação e abstração são os mais importantes para o pensamento avançado, mas a interação destes com outros processos propende uma eficiência no aprendizado. Ele exemplifica este fato associando o processo de representação e abstração ao processo de descobrir ou redescobrir “A descoberta, ou melhor, a redescoberta de relacionamentos, por exemplo, costuma ser considerada uma das maneiras mais eficazes de as crianças aprenderem matemática.” (DRYFUS, 2002, p. 40 traduções nossa)⁹. Diante desta reflexão, é relevante que as estratégias de ensino sejam elaboradas de modo a beneficiar a ação do aluno como sujeito do seu aprendizado, associados a estratégias que permitam o aluno desenvolver os processos mencionados. A elaboração das estratégias é da função docente. Com a intenção de expor considerações referentes à atuação docente, apresentam-se na seção 3.2 reflexões que tratam desse assunto. A próxima seção trata sobre função,

⁸ There is no sharp distinction between many of the processes of elementary and advanced mathematical thinking, even though advanced mathematics is more focussed on the abstractions of definition and deduction.(DREYFUS, 2002, p.26).

⁹ Discovering or rather rediscovering relationships, for instance, is often considered among the most effective ways for children to learn mathematics. (DRYFUS, 2002, p. 40).

apresentando uma reflexão fundamentada por autores que apresentam sobre o conceito, definição e concepção de função.

2.1 FUNÇÃO: CONCEITO, DEFINIÇÕES E CONCEPÇÃO

Esta seção trata sobre o conceito de funções baseado nos estudos de Ponte (1990), as definições de funções conforme Caraça (1951) e a concepção de função apresentado por Thompson e Carlson (2017), procurando desenvolver uma reflexão sobre estes assuntos a fim de propor relações com o PE desenvolvido para esta pesquisa. O PE apresenta uma estratégia para o ensino de funções apoiado por materiais didáticos multissensoriais, compostos por recursos que objetivam auxiliar o aluno a perceber a relação de covariação entre variáveis.

Ponte (1990) faz uma apresentação temporal do desenvolvimento do conceito de funções, mencionando que este assunto surgiu como proposta de objeto de estudo no final do século XVII. Descreve, também, que a essência do atual conceito de funções foi estabelecida por Dirichlet, conforme apresenta em seu trabalho:

Dirichlet separou então o conceito de função da sua representação analítica, formulando-o em termos de correspondência arbitrária entre conjuntos numéricos (em 1837). Uma função seria simplesmente uma correspondência entre duas variáveis, tal que a todo valor da variável independente se associa um e um só valor da variável dependente. Finalmente, com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, iniciada por Cantor (1845 – 1918), a noção de função acabaria por ser estendida já no século XX de forma a incluir tudo o que fossem correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não. (PONTE, 1990, p. 4).

Conforme Ponte (1990), Dirichlet apresenta a noção de função como uma relação arbitrária entre variáveis, sendo o valor de uma variável determinado pelo valor de outra por meio de uma lei de correspondência.

Sobre definição de função, Caraça (1951), começa o capítulo que trata sobre o estudo de funções relatando que os conceitos matemáticos surgem por meio das intervenções da Matemática na busca de soluções de problemas quantitativos de fenômenos naturais. Em consequência dessas ações, desenvolvem-se os chamados modelos matemáticos, que servem de auxílio para os estudos. Sobre o estudo “conceito de função”, Caraça (1951) inicia sua reflexão a partir de um exemplo que apresenta um fenômeno físico chamado “Queda dos Graves no Vácuo”, de modo a facultar a relação existente entre as variáveis de tempo e espaço do problema explicitado. A partir deste exemplo levanta questionamentos sobre o comportamento constatado entre os elementos dos conjuntos tempo e espaço, propondo a

análise da relação de correspondência entre os elementos destes conjuntos, os quais denominou de variáveis. Por fim, estabelece um modelo matemático generalizado para determinar a relação existente entre os elementos dos conjuntos para solucionar o problema apresentado.

De modo geral, Caraça (1951) apresenta a seguinte definição para função:

Definição: - Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se:

$$y = f(x)$$

se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. A x chama-se variável independente, a y a variável dependente. (CARAÇA, 1951, p.129).

Caraça (1951), em sua obra, apresenta modos de definição da lei de correspondência e, entre eles, destacam-se dois, a fim de propor uma reflexão: a definição analítica e a definição geométrica.

A definição analítica é a forma exposta como uma lei de correspondência entre as variáveis, uma expressão algébrica que, por intermédio dela, possa se corresponder cada valor atribuído à variável “ x ” em um único valor da variável “ y ”. A fim de descrever uma reflexão sobre esta definição, utiliza-se o exemplo que Caraça (1951, p. 130) apresentou: “ $y = 4,9. x^2$ ”.

Esta lei de correspondência, ou expressão algébrica como mencionado acima, é um modelo matemático desenvolvido por Caraça para resolver o problema inicial do seu estudo (Queda dos Graves no Vácuo). É relevante deixar explícito que esta expressão algébrica é um modelo estabelecido para corresponder às variáveis envolvidas no problema a ser resolvido, que não seja interpretada como o conceito de função, conforme Caraça (1951) descreve, “Repare bem o leitor: o conceito de função não se confunde como uma expressão analítica; - esta é apenas um modo de estabelecer a correspondência das duas variáveis.” (CARAÇA, 1951, p. 131). Ponte também dá destaque para este fato da seguinte maneira: “Um modelo matemático constitui uma representação duma dada situação, através de objetos, relações e estrutura com que se procura descrever os elementos considerados fundamentais dessa situação [...]” (PONTE, 1990, p.5).

Palis (2013) relata em seu estudo a incompreensão que os alunos têm sobre o conceito de função:

Na transição do ensino médio para o superior, um número expressivo de alunos acredita que todas as funções podem ser definidas por uma fórmula algébrica; uma

função é somente pensada em termos de manipulação simbólica e numérica, de forma desconectada do seu aspecto conceitual. (PALIS, 2013, p. 1).

Assim, é interessante que sejam desenvolvidas estratégias que proporcionem a concepção de função aos estudantes, de modo que eles percebam esse estudo por meio da correlação entre as variáveis envolvidas, reflexão que apresenta-se no decorrer desta seção. É por meio desta analogia, desta percepção, que são desenvolvidos os modelos matemáticos e este sim pode ser uma expressão algébrica. No próximo parágrafo, será tratado sobre a definição geométrica.

Caraça apresenta a definição geométrica por meio da análise gráfica de uma curva no plano cartesiano, salienta que a curva apresentada não pode ser interceptada em mais de um ponto ao representarmos uma reta paralela ao eixo Oy . Ele apresenta esta definição por meio da análise de pontos inseridos na curva, onde cada número correspondente à variável x relaciona-se a um único número correspondente a variável y e esta relação está atribuída a uma única construção indicada para todos os elementos de x em y . Assim concluindo que o instrumento de definição nesse caso foi a curva.

Nessa seção foram expostos dois procedimentos apresentados por Caraça para definir funções: o analítico e o geométrico. A percepção das relações existentes entre as variáveis de uma função proporciona a concepção de função, assunto que se trata a seguir.

Sobre concepção de função, apresenta-se o estudo de Thompson e Carlson (2017) que trata sobre ideia de covariação como base para concepção de função. Eles apresentam uma análise histórica da ideia de função relatando que em seus primórdios, o pensamento variacional era o centro dessas ideias, feito que ao passar dos tempos foi sendo subtraído. Na atualidade, a ideia de função é apresentada por meio da relação arbitrária entre variáveis, expressa por produtos cartesianos e pares ordenados, conforme Thompson e Carlson (2017), “Ideias de variação e covariação nos valores das variáveis não se encaixam mais na definição matemática de função de hoje.” (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 422, tradução nossa)¹⁰. Essa concepção arbitrária é significativa para o entendimento de função?

Conforme Rezende (2012), alunos inseridos no ensino de Cálculo que trazem de estudos anteriores um conceito estático da relação entre as variáveis da função, esta noção predispõe a obstáculos epistemológicos:

¹⁰ Ideas of variation and covariation in variables' values no longer fit within today's mathematical definition of function. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 422).

Cabral (1998), por exemplo, revela-nos que as dificuldades dos estudantes na resolução de problemas de taxas relacionadas e problemas de otimização estão diretamente relacionados ao fato de não conseguirem “enxergar” as quantidades variáveis envolvidas no problema dessa natureza nem tampouco a relação funcional entre elas: O difícil mesmo é encontrar a função! – respondem os estudantes. (CABRAL, 1998 apud REZENDE, 2012, p. 75).

Na citação acima, percebe-se a dificuldade que os alunos encontram quando se deparam com estudos que exigem o pensamento funcional. É relevante compreender função como um estudo matemático que apresenta-se com duas ou mais quantidades e variam uma em relação a outra.

Thompson e Carlson (2017) argumentam, fundamentado por meio de estudos, que a percepção da variação de quantidades simultâneas entre variáveis é um raciocínio fundamental para a concepção de função e apresentam um significado para função baseado neste raciocínio:

Uma função, covariacionalmente, é uma concepção de duas quantidades variando simultaneamente de modo que haja uma relação invariável entre seus valores que tem a propriedade de que, na concepção da pessoa, todo valor de uma quantidade determina exatamente um valor da outra. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 444, tradução nossa.)¹¹.

Assim, o pensar função covariacionalmente parte do sujeito, pois é ele quem vai perceber as situações existentes e conceber as relações de variabilidade. Deste modo, deve-se propor estratégias de ensino que definam funções possibilitando o raciocínio covariacional dos alunos. A habilidade necessária para perceber estas relações pode ser adquirida por meio de recursos que permitam o desenvolvimento do pensamento funcional.

O próximo capítulo trata de reflexões sobre ensino e aprendizagem com o intuito do desenvolvimento do pensamento funcional.

¹¹ A function, covariationally, is a conception of two quantities varying simultaneously such that there is an invariant relationship between their values that has the property that, in the person’s conception, every value of one quantity determines exactly one value of the other. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 444)

3 ENSINO E APRENDIZAGEM: REFLEXÕES A CERCA DE UMA ABORDAGEM METODOLOGICA

Este capítulo apresenta-se com reflexões no que concerne ao ensino e aprendizagem de funções orientada pelo desenvolvimento do pensamento funcional. Inicia-se a seção trazendo uma reflexão sobre aprendizagem significativa; em seguida atuação docente, dispositivos tecnológicos e findando com Modelo Didático. Trata-se de um texto articulando os temas citados para discussão analítica do estudo desenvolvido.

3.1 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Segundo Vigotski (2019), a criança se desenvolve a partir do nascimento por meio da socialização com seus pares ocasionando a aprendizagens mesmo antes da escola, assim a aprendizagem e o desenvolvimento estão interligados desde os primeiros dias de vida. Desse modo, as crianças aprendem por meio da sua vivência; essa bagagem adquirida durante suas experiências indica que ela não é uma “tábua rasa”, pois possui conhecimentos prévios que servem de estruturas para o desenvolvimento de novos conhecimentos.

Essas estruturas são utilizadas como base para os novos conhecimentos, sendo um fator considerável para o desenvolvimento de novos saberes, assim proporcionando uma aprendizagem significativa, conforme Moreira (2011). Isso quer dizer que a aprendizagem significativa desenvolve-se a partir dos conhecimentos prévios dos alunos, relacionando estes conhecimentos com novos conceitos, favorecendo um novo estágio na aprendizagem. Como Moreira (2011, p.14) diz, “é importante reiterar que a aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre os conhecimentos prévios e conhecimentos novos, e que essa interação é não-litera e não arbitrária.” Promover essa interação é propor um processo ativo para a aprendizagem dos estudantes e segundo Dante (2005, p. 13), “Os alunos são pessoas ativas que observam, constroem, modificam e relacionam ideias, interagindo com outros alunos e pessoas, com materiais diversos e com o mundo físico.” Uma aprendizagem ativa está relacionada à aprendizagem significativa, pois segundo Moreira (2011), a aprendizagem torna-se significativa quando o estudante consegue significar o assunto estudado (conceitos, ideias, proposições), capacitando-o a expor suas ideias e percepções, permitindo que ele solucione novos problemas, enfim, que ele tenha compreendido o tema estudado.

Moreira ainda aponta duas condições importantes para aprendizagem significativa: “Resumindo, são duas as condições para aprendizagem significativa: material potencialmente significativo (que implica logicidade intrínseca ao material e disponibilidade de conhecimentos especificamente relevantes) e predisposição para aprender.” (op.cit., p. 26).

Conforme o autor já citado, não há livro, aula, estratégia significativa, é o aluno quem vai atribuir o significado ao material de aprendizagem. Assim, o material potencialmente significativo é aquele que procura dialogar, de maneira adequada e relevante, com o conhecimento prévio do estudante. Esta ação tende a propiciar a predisposição do aluno para aprender. Dessa maneira, o material de aprendizagem deve ser organizado de modo que recorra aos conhecimentos prévios (subsunçores ou ideias-âncoras) dos alunos, ainda na ausência destes conhecimentos prévios, deve-se elaborar uma fundamentação para suprir esta ausência, os chamados organizadores prévios. Dante (2005, p. 13) afirma: “O professor precisa criar um ambiente de busca, de construção e de descoberta e encorajar os alunos a explorar, desenvolver, testar, discutir e aplicar ideias matemáticas.”, demonstrando a importância da ação do professor em elaborar: os organizadores prévios¹².

Organizadores prévios são recursos utilizados para estudantes que não dispõem de pontos de ancoragem para a aprendizagem. Esses recursos devem ser utilizados de modo introdutório, habilitando o estudante a relacionar os conhecimentos prévios com os novos conhecimentos. Segundo Moreira (2011), há dois tipos de organizadores, um que propõe suprir a ausência de conhecimentos prévios, propondo conceitos que sirvam de ancoragem e outro que expõe a relação existente entre o conhecimento prévio e o novo.

Conforme Moreira (op.cit.), a aprendizagem significativa é desenvolvida com o envolvimento de três conceitos: o significado, interação e conhecimento e, ainda, implícito a eles a linguagem verbal ou não-verbal. Ainda de acordo com o autor, esses conceitos são definidos como: Significado: os significados estão nas pessoas e são desenvolvidos por meio da linguagem; Interação: é a interação do conhecimento existente (já estabelecida pelo sujeito) com o novo conhecimento, essa interação é estabelecida pela linguagem; Conhecimento: o conhecimento é se apropriar da linguagem. A linguagem aqui está designada como um sistema articulado de signos, é por meio da linguagem representacional (não verbal) ou verbalizada que são proporcionadas as reflexões, as relações e as interações entre os

¹² Segundo Moreira, são atividades que pretendem desencadear ou promover os subsunçores para um novo aprendizado relacionado a estas atividades: “Em outras palavras, organizadores prévios podem ser usados para suprir a deficiência de subsunções ou para mostrar a relacionalidade e a discriminabilidade entre novos conhecimentos e conhecimentos já existentes, ou seja, subsunçores.” (MOREIRA, 2011, p. 30).

conhecimentos prévios com os novos conhecimentos, assim possibilitando uma aprendizagem significativa.

As fichas de trabalho propostas nesta dissertação foram desenvolvidas com estratégias que promovam a interação dos conhecimentos prévios dos alunos com conceitos matemáticos presentes no dia a dia. Ação orientada por uma sequência didática que emprega recursos que dispõem de linguagem verbal e não verbal, permitindo uma didática multissensorial. Essa estratégia pretende estimular a percepção das relações existentes entre variáveis, auxiliando o aluno a desenvolver o pensamento funcional contribuindo para o estudo de funções. Assim, proporcionando ao aluno o desenvolvimento do conhecimento científico de modo ativo. Com o intuito que este processo seja bem-sucedido, a atuação docente tem um papel importante, reflexão que será desenvolvida na próxima seção.

3.2 ATUAÇÃO DOCENTE

O professor tem um papel importante no processo de ensino e aprendizagem, como mediador na articulação de conhecimentos. O trabalho do professor é desafiador, pois ele deve contextualizar ou recontextualizar assuntos permitindo que o aluno compreenda o tema, Pais (2001). Demo (2010), afirma que as aulas não garantem aprendizagem elas são instrumentos para o ensino e aprendizagem, o aprendizado do aluno parte da sua autonomia. As estratégias propostas para o ensino devem ser elaboradas propondo a autonomia dos alunos no processo de aprendizagem. Para este fim, é pertinente que o professor utilize material de aprendizagem potencialmente significativo, um material que possibilite ao aluno atribuir um significado contextualizado com o tema estudado, e que o aluno tenha ideias-âncora relevantes para relacionar com o material apresentado, assim desenvolvendo uma aprendizagem significativa conforme Moreira (2011).

Para os alunos desenvolverem seus conhecimentos, é relevante que as ações didáticas proporcionem uma reflexão, uma interação entre seus saberes prévios com os novos conceitos. Segundo Zabala (2014, p. 48), “[...] é necessário, que diante destes, possam atualizar seus esquemas de conhecimento, compará-los com o que é novo, identificar semelhanças e diferenças e integrá-las em seus esquemas, comprovar que o resultado tem certa coerência.”, assim é pertinente que o professor esteja preparado para novas concepções em sua organização pedagógica com o objetivo de conduzir uma aula favorável ao aluno.

O saber experiencial e institucional do professor pode ser um aliado, mas a demanda por novos conhecimentos é pertinente para a atualização deste profissional que tem a incumbência de ser mediador no processo de aprendizagem. Conforme Hendres e Kaiber (2005) o professor tem de dominar os recursos empregados para o ensino a fim de propiciar um aprendizado considerável ao aluno, “Conhecê-los em todo o seu aspecto é requisito principal para a sua utilização, do contrário, gera dúvidas e decepções para o professor e aluno.” (HENDRES e KAIBER, 2005, p.36).

Perrenoud (2000) apresenta dez competências para ensinar, destaca-se aqui a competência de saber administrar sua própria formação, assim, atualizar-se é estar preparado para as condições de trabalho que estão em constante desenvolvimento como no processo de ensino. Faz-se essa reflexão sobre a atuação docente, pois as concepções de sequência didática e a utilização de recursos tecnológicos para o ensino são relevantes para a produção dos organizadores prévios, que amparam o processo da aprendizagem significativa. Conforme Perrenoud (2000), a aprendizagem se origina por uma trajetória de ações em que o professor é o mediador deste processo, disponibilizando meios, situações que sejam atrativos e mobilizem os alunos na busca do aprender. Faz-se essas ponderações, pois esta dissertação é referente a um mestrado profissional no qual o produto educacional elaborado durante o curso é uma sequência didática que apresenta recursos tecnológicos que necessitam de conhecimentos específicos para utilização. Na próxima seção, trataremos sobre dispositivos tecnológicos como recursos pedagógicos.

3.3 DISPOSITIVO TECNOLÓGICO COMO OBJETO DE APRENDIZAGEM (AO)

Pais (2011) diz que a formação de conceitos deve ser vista como um ponto central na prática pedagógica e que as novas tecnologias de informação na educação devam ser oportunas para este fim. Deste modo, o uso de recursos tecnológicos como Objeto de Aprendizagem (OA) tendem a ser um facilitador para o ensino e aprendizagem, conforme Braga e Menezes (2015):

Quando bem utilizados, os OA (Objetos de Aprendizagens) podem ser grandes aliados do processo educativo. É necessário que o professor tenha clareza dos objetivos que deseja alcançar e, em seguida, selecione e defina boas estratégias de utilização dos OAs em sua sala de aula, de forma a atender seus objetivos. (BRAGA e MENEZES, 2015, p. 12)

Mas o que é um objeto de aprendizagem? Braga e Menezes (2015) apresentam diferentes definições para OA, entre elas, a do Instituto de Engenheiros Eletrônicos e Eletricistas (*Institute of Electrical and Electronic Engineers - IEEE*) que possui um comitê de padrões para tecnologia o *IEEE Learning Technology Standards Committee (LTSC)*, que definiu OA como “Qualquer entidade, digital ou não, que pode ser usada, reutilizada ou referenciada durante o aprendizado apoiado pela tecnologia.” (BRAGA e MENEZES, 2015, p.13). Assim, de modo que esteja atribuída a uma questão pedagógica a utilização da Tecnologia de Informação e Comunicação (TIC) pode assumir o papel de OA.

As TICs podem ser aplicadas no ensino e aprendizagem da Matemática como um recurso didático para o aprendizado. Um ensino que está baseado na utilização de ferramentas tecnológicas é uma educação inovadora, conforme Moura e Brandão (2013):

O uso das novas tecnologias da comunicação e informação representa uma grande inovação na educação, pois propicia o desenvolvimento das produções em colaboração, podendo instigar o espírito investigativo tanto dos alunos quanto dos professores sendo que estes poderão apropriar-se do uso das tecnologias para mediar os trabalhos dos estudantes, sentindo-se desafiados a buscar condições mais adequadas para o processo de aprendizagem interativo e dinâmico (MOURA e BRANDÃO, 2013, p. 3).

O uso da tecnologia como recurso para o aprendizado desafia os professores a buscarem novas metodologias que estimulem os alunos a um aprendizado colaborativo e significativo. Segundo o PCN de Matemática (1998), os recursos tecnológicos podem contribuir para aprendizagem da Matemática à medida que “possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;” (BRASIL, 1998, p. 44), sendo assim, uma metodologia de ensino que contemple recursos que fazem parte do cotidiano do aluno, tende a proporcionar o interesse do aluno na busca do saber oportunizando uma aprendizagem significativa.

Conforme Valente (2014), cada indivíduo constrói seu conhecimento por meio da informação, desenvolvendo um processo de inter-relação entre interpretar e compreender a informação, intermediado pelo diálogo na interação entre seus pares e/ou seu meio.

Considerando o ensino e aprendizagem, o material para aprendizagem disponibilizado aos alunos deve ser organizado de modo que estabeleça um papel educacional, proporcionando ao aluno converter as informações recebidas em conhecimento. Esse material

pode ter como aliado as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs)¹³, conforme Valente (2014, p. 144) “Ou seja, como criar situações de aprendizagem para estimular a compreensão e a construção de conhecimento. Uma das soluções tem sido o uso das TDICs.”, logo, o uso da tecnologia pode ter um papel significativo para o ensino e aprendizagem.

Os simuladores são TDICs que tendem a criar situações que possibilitem o envolvimento, o estímulo aos estudantes para a aprendizagem. Braga e Menezes (2015) definem simulação como:

Pode-se dizer também que simulação é uma técnica de estudar o comportamento e as reações de determinados sistemas por meio de modelos. As simulações são animações que representam um modelo da natureza e, devido a isso, podem ser muito utilizadas como objetos de aprendizagem. (BRAGA e MENEZES, 2015, p. 17).

Portanto, o uso da simulação pode representar características e comportamentos dos objetos de estudo permitindo uma aprendizagem diferenciada. O uso de simuladores propicia aos alunos a interação com objetos, permitindo a observação, a análise de fenômenos, proporcionando uma aprendizagem reflexiva das suas ações possibilitando a reestruturação de suas ideias, caso necessário, bem como um estudo colaborativo e participativo, conforme Valente (2014):

Um segundo tipo de aplicação das TDICs na educação é a programação ou a simulação de fenômenos. Para a realização dessas tarefas, o aprendiz deve descrever suas ideias na forma de instruções, usando os recursos de comunicação específicos para cada uma dessas tarefas. As tecnologias digitais, por sua vez, executam tais instruções, produzindo resultados que são observados pelo aprendiz. Ele reflete sobre as observações e confronta o que pretendia realizar com o resultado alcançado. Se o produto obtido não corresponde ao desejado, ele deve depurar suas ideias, gerando nova descrição. Esse ciclo de ações é fruto de um diálogo com o próprio pensamento, com os colegas, com o professor e com o meio, gerando a espiral ascendente da aprendizagem baseada na descrição-execução-reflexão depuração-nova descrição (VALENTE, 2002 apud VALENTE, 2014, p. 146).

Assim, o uso de simuladores tende a proporcionar um aprendizado no qual o aluno assume o protagonismo na sua formação de modo reflexivo, participativo e colaborativo. Ainda, a interação do sujeito com o simulador tende a despertar o interesse dos alunos pelo estudo, permitindo uma aprendizagem significativa, conforme Valente (2014),

¹³ Nomenclatura utilizada por Valente (2014, p. 1).

No caso do ensino de Física, no tópico sobre conservação de energia, por exemplo, o uso do software de simulação possibilita a realização de atividades muito mais interessantes e significativas do que simplesmente aplicar fórmulas e calcular parâmetros, como as atividades tradicionalmente realizadas por intermédio do lápis e do papel. (VALENTE, 2014, p. 151).

Nesta dissertação, apresentam-se considerações sobre a utilização de um simulador que proporcionará uma análise visual e uma leitura tátil, propiciando a generalização das relações existentes entre as variáveis envolvidas no gráfico da função proposta na configuração do simulador.

A proposta pedagógica da pesquisa está desenvolvida com o auxílio de TICs como ferramentas de apoio para aprendizagem, com o objetivo de proporcionar uma didática multissensorial para o ensino, procurando contribuir para o desenvolvimento do pensamento funcional dos alunos. Esses recursos estão inseridos no modelo didático.

3.4 MODELO DIDÁTICO

Nesta seção, apresentar-se-á uma reflexão de estudos que dissertam sobre sequência didática, estratégia de ensino que compõe o PE desta dissertação.

Ao deparar-se com as palavras sequência didática, logo se pensa num plano elaborado com atividades para uma determinada aula, porém quando expressado em sequência didática como um instrumento pedagógico na formação educacional dos alunos, muda-se o sentido. Então, o que é uma sequência didática? Conforme Zabala (2014, p. 24) “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.”. Ou seja, uma sequência didática trata de um conjunto de atividades que estabelece uma determinada organização interna desde o começo até seu fim. Definindo os objetivos que deseja-se que o aluno desenvolva em termos de conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais. Este conjunto de atividades funciona como se fosse uma atividade única, tendo uma finalidade de atingir um determinado objetivo pedagógico com o desenvolvimento de determinadas competências e habilidades, como propõe Zabala (2014).

Conforme Pais (2011), a criação de uma didática deve ser elaborada com um objetivo e desenvolvida a fim de atingir este objetivo, pois a utilização de um recurso desvinculado da finalidade principal tende a ser um problema, proporcionando um ensino sem um contexto significativo. Deste modo, uma sequência didática deve ser pensada como um conjunto de

atividades, analisar qual condição inicial e qual condição pretende-se atingir e neste percurso o que se deve fazer, de quantas intervenções são necessárias, quais recursos serão necessários, quais ações devem ser tomadas para atingir os objetivos.

Zabala (2014) menciona que os professores devem estar cientes sobre os sentidos de cada fase da sequência para que não perca o seu objetivo, e que aplique mudanças, caso seja necessário:

Portanto, a identificação das fases de uma sequência didática, as atividades que a envolve, as relações que se estabelecem devem nos servir para compreender o valor educacional que têm, as razões que as justificam e a necessidade de introduzir mudanças ou atividades novas que a melhorem. (ZABALA, 2014, p. 73).

Assim, uma sequência didática adequada para o ensino deve ter suas fases organizadas e deve ser elaborada para um determinado objetivo que pode estar definido para um certo público, mas a sua estrutura deve permitir a intervenção nas suas variáveis, permitindo que ela possa ser ajustada para outros ambientes de aplicação.

As atividades apresentadas nesta dissertação estão organizadas com uma sequência didática que seguem esses fundamentos, a fim de desenvolver uma análise das fichas de trabalho com a teoria, assim permitindo uma reflexão dos efeitos do objeto estudado, conforme Pais, “[...]é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigado” (PAIS, 2011, p. 102). Na próxima seção será tratado sobre a técnica de pesquisa que foi aplicada nesta pesquisa, trazendo considerações dos autores Creswell (2007) e Lima e Miotto (2007).

4 METODOLOGIA DE PESQUISA

Esta pesquisa adotou uma abordagem qualitativa, focada na análise do produto educacional que pretende auxiliar no desenvolvimento do pensamento funcional dos alunos por meio de recursos tecnológicos. Buscou-se responder à pergunta diretriz utilizando o método de pesquisa bibliográfica, de modo a utilizar PEs disponíveis em repositórios educacionais, com a finalidade de fazer reflexões sobre as fichas de trabalhos elaboradas para este trabalho. Salienta-se que uma pesquisa bibliográfica é diferente de uma pesquisa de revisão bibliográfica conforme Lima e Miotto (2007):

Ao tratar da pesquisa bibliográfica, é importante destacar que ela é sempre realizada para fundamentar teoricamente o objeto de estudo, contribuindo com elementos que subsidiam a análise futura dos dados obtidos. Portanto, difere da revisão bibliográfica uma vez que vai além da simples observação de dados contidos nas fontes pesquisadas, pois imprime sobre eles a teoria, a compreensão crítica do significado neles existente. (LIMA e MIOTTO, 2007, p. 44)

Para fundamentar a estratégia de pesquisa, serão seguidas as orientações de Creswell (2007) e Lima e Miotto (2007).

Creswell (2007) afirma que a pesquisa qualitativa apresenta diversas características atribuídas por diferentes autores. “Eu recomendaria as características baseadas nas ideias de Rossman e Rallis (1998)” (CRESWELL, 2007, p.186), o autor sugere seguir as ideias destes autores porque eles apresentam uma combinação das perspectivas tradicionais com as mais recentes de investigação qualitativa reivindicatória, participatória e autorreflexiva. Ainda, apresenta algumas características proposta pelos autores, das quais se destacam as seguintes: A Pesquisa qualitativa usa métodos múltiplos para coleta de dados; A pesquisa qualitativa não está estritamente pré-configurada, pois as questões podem ser moldadas durante o processo, conforme eventos que surgirem, episódio que possibilita o aprimoramento das questões e induzindo para uma análise mais significativa dos dados; A pesquisa qualitativa é fundamentalmente interpretativa onde o pesquisador interpreta os dados coletados buscando conclusões sobre seus significados, segundo Rossman e Rallis (1998 apud CRESWELL, 2007, p.186). Utiliza-se tais características como fundamentos para escolha das estratégias que foram utilizadas neste trabalho, que anuncia-se a seguir.

A pesquisa teve como instrumento de coleta de dados consultas em repositórios educacionais na busca de PE que utilizem recursos educacionais para o ensino de funções. Essa estratégia de classificação de material por meio de dissertações associadas aos seus PE já

publicados, fazem parte de uma pesquisa bibliográfica conforme Lima e Miotto (2007). Creswell (2007)

Os registros para análise desses documentos foram desenvolvidos por meio de fichamentos, pontuando dados dos PE pesquisados, a fim de analisar e propor uma reflexão junto às fichas de trabalhos elaboradas para este trabalho.

Conforme Creswell (2007), após coletados e registrados os dados, encaminha-se para a fase de análise de dados, que está dividida em seis passos: Passo 1 - Organizar e preparar os dados para análise: classificar e organizar os dados; Passo 2 - Ler os dados: obter um sentido dos dados; Passo 3 - Codificação: organizar informações em grupos e rotular; Passo 4 - Descrição: informações detalhadas dos fatos; Passo 5 - Prever a representação: Prever como a descrição e os temas serão representados na narrativa qualitativa; Passo 6 - Interpretação: Quais foram as lições aprendidas.

A validação dos resultados seguirá a proposta de Creswell (2007) que apresenta oito estratégias primárias, entre elas optou-se pelas seguintes: “fazer uma triangulação de diferentes fontes de informação de dados, examinando as evidências das fontes usando-as para criar uma justificativa coesa para os temas” (CRESWELL, 2007, p. 200), optou-se por essa estratégia porque os dados coletados serão os meios para comparação com a proposta do P.E que apresenta-se neste trabalho; “Use conferência dos membros para determinar a precisão dos resultados qualitativos, levando relatório final ou descrições específicas, ou os temas de volta para os participantes e determinando se esses participantes os consideram preciso” (CRESWELL, 2007, p. 200). A razão da escolha desta estratégia é em virtude da participação do pesquisador no grupo de orientação no qual acontecem as discussões sobre os trabalhos realizados pelos orientandos, mediado pela orientadora. Assim, a validação será por meio de uma análise comparativa dos PE que proporcionaram reflexões do pesquisador, estas reflexões serão debatidas com seus pares autorizando novas considerações sobre o processo.

5 PRODUTOS EDUCACIONAIS E A RELAÇÃO COM A PROPOSTA DAS ATIVIDADES DESTA DISSERTAÇÃO

Neste estudo é apresentada uma sequência didática que foi elaborada com atividades que utilizam simuladores como recursos para o estudo de função. Sendo um deles um simulador *online* que apresenta um ambiente intuitivo, estilo jogo. Este recurso oportuniza aos alunos construírem seu conhecimento por meio da interação, da exploração do simulador. Ação que viabiliza ao aluno compreender e interpretar informações, transformando-as em conhecimento. Deste modo, este recurso pode ser oportuno como uma ferramenta para o desenvolvimento do pensamento funcional do aluno. Ainda, apresentam-se estudos que utilizam recursos táteis para o ensino. Propomos esta reflexão destacando que recursos táteis não devem ser considerados como recursos exclusivos para alunos portadores de necessidades educacionais especiais. O desenvolvimento dos alunos está relacionado às experiências que lhe são vivenciadas, conforme Schneide (2017) “Todas as crianças se desenvolvem com mais ou menos qualidade, dependendo de suas experiências afetivas, cognitivas e sociais. São elas que vão promover o sucesso e insucessos, caso haja deficiência ou não.” (SCHNEID, 2017, p.78). Desse modo, estes recursos podem auxiliar alunos que apresentam uma habilidade tátil mais significativa que a visual.

Assim, nesta seção buscou-se reunir e sintetizar propostas educacionais que apresentam a mesma natureza desta dissertação a fim de propor relações e reflexões. Foram identificados e selecionados trabalhos que utilizaram a mesma estratégia de ensino. De modo a ilustrar, apresentamos uma tabela relacionando a atividade proposta na sequência didática com a atividade selecionada.

Tabela 1 - Relações

Título da atividade apresentada na Dissertação	Autores que apresentam mesma proposta	Recurso semelhantes as duas propostas
Batalha Naval	Silva e Kodama (2004)	Simulador/Jogo
Meu Bairro no Plano Cartesiano	Rocha (2013)	Simulador
Como b depende de a	Forsan (2017)	Simulador
Simulador tátil	Oliveira (2010) e Camacho (2012).	Materiais manipuláveis
Construtor de Funções	Reis e Rehfeldt (2019), Moura <i>et al.</i> (2020) e Moura e Lavor (2021)	Simuladores

Fonte: Autor (2022)

A seguir apresentam-se as atividades e reflexões. Salientando que as atividades juntamente com suas fichas de trabalho apresentar-se-ão no apêndice.

5.1 ATIVIDADE: O JOGO BATALHA NAVAL.

5.1.1 Descrição da atividade

Atividade O jogo batalha naval tem como objetivo auxiliar os alunos a reconstruírem/construírem o conceito de par ordenado de modo lúdico. Para esta atividade é necessário que os alunos tenham o Jogo Batalha Naval (Sea Battle) salvo em seu smartphone, este jogo tem download gratuito no aplicativo Store. Também é necessário que os alunos tenham materiais para fazer anotações.

Deseja-se que ao final da atividade os alunos tenham desenvolvido a habilidade de determinar ou localizar um objeto num plano por meio de um sistema de referências.

A fim de avaliar o aprendizado dos alunos, é sugerido que seja realizado um debate com os alunos permitindo que o professor analise e identifique possíveis incompreensões. Assim, se caso necessário, interfira e auxilie a construção do conhecimento.

Essa atividade foi elaborada utilizando um jogo como recurso para o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, a seguir apresenta-se uma reflexão a partir do estudo de Silva e Kodama (2004).

5.1.2 Estudo relacionado a atividade proposta no PE

Silva e Kodama (2004) apresentam uma sequência de jogos que objetivam o ensino da matemática. As autoras iniciam o texto apresentando uma reflexão sobre possíveis sentimentos que o ato de brincar/jogar promove nas crianças, como por exemplo: curiosidades, superações de dificuldades, prazeres, entre outros. Desenvolver estes sentimentos para o aprendizado pode ser um coeficiente significativo para o aprendizado do aluno. Assim, os jogos orientados para questões pedagógicas podem ser um aliado para este fim. Conforme as autoras “A atividade lúdica é essencialmente, um grande laboratório em que ocorrem experiências inteligentes e reflexivas, essas experiências produzem o conhecimento.” (SILVA e KODAMA, 2001, p.3). Logo, os jogos podem propor novas experiências de

aprendizado para os alunos. As autoras destacam que jogar pode proporcionar desafios, questionamentos, disposição dos alunos em desenvolver as atividades com sentimento de desejo, ou seja, diferente de uma atividade submetida de modo obrigatória. Ainda, descrevem que o jogo valoriza a participação ativa do aluno sobre seu saber, apresentando dois motivos que justificam esta informação. O primeiro é que o jogo oportuniza ao aluno com dificuldades uma relação positiva para o desenvolvimento da sua aprendizagem. O aluno percebe que tem condições de aprender modificando uma concepção negativa do ato de estudar para uma experiência que aprender é uma atividade interessante e desafiadora. Outro motivo é que o jogo oportuniza ao aluno a construção do seu próprio saber possibilitando o desenvolvimento no seu raciocínio. Segundo Silva e Kodama (2004, p.3), “Os jogos são instrumentos para exercitar e estimular um agir-pensar com lógica e critério, condições para jogar bem e ter um bom desempenho escolar.”

Assim, os jogos inseridos como recursos didáticos podem proporcionar aos alunos sentimentos como os de brincar, sentimentos que podem favorecer o aprendizado dos alunos. Deste modo, o jogo batalha naval pode beneficiar os alunos a compreenderem como localizar ou determinar um ponto num plano, num sistema de referências. Deseja-se que esta atividade oportunize ao aluno a perceber e analisar as relações existentes nas coordenadas de um ponto, proporcionando o entendimento da variação da quantidade entre as variáveis de uma função em estudos futuros.

5.2 ATIVIDADE: MEU BAIRRO NO PLANO CARTESIANO.

5.2.1 Descrição da atividade

Atividade Meu bairro no Plano Cartesiano propõe que o aluno visualize e identifique pontos de seu interesse no seu bairro por meio de um plano cartesiano sobreposto a imagem aérea do bairro onde mora, gerada pelo do Google Earth. O propósito desta atividade é de auxiliar os alunos a localizarem coordenadas nos quadrantes do plano cartesiano. Para este fim as tarefas foram desenvolvidas permitindo que os alunos visualizem e identifiquem pontos de interesse no seu bairro. Esta ação será realizada por meio de um plano cartesiano sobreposto a imagem aérea do bairro onde mora, gerada pelo do Google Earth. Para desenvolver a atividade, são necessários os seguintes recursos: Papel quadriculado, régua,

Smartphone, computador com GeoGebra instalado, Data show, Link: <https://www.youtube.com/watch?v=OgZej6gCAZI>, material para anotações.

Essa atividade foi elaborada utilizando o GeoGebra como recurso para o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, a seguir apresenta-se uma reflexão a partir do estudo de Rocha (2013).

5.2.2 Estudo relacionado a atividade proposta no PE

A autora apresenta uma sequência de atividades com situações contextualizadas e voltadas para o dia a dia do aluno para serem resolvidas com o auxílio de softwares matemáticos a fim de ilustrar conceitos de funções quadráticas. As atividades apresentam-se de modo contextualizados, as quais os alunos devem transferir a linguagem natural para a expressão matemática, definir a lei da função por meio de dados fornecidos e utilizar o software Winplot ou wxMaxima para resolver problemas práticos. Em suas considerações, a autora registra que a utilização da tecnologia para o estudo de funções quadráticas pode ser um recurso expressivo para auxiliar os professores em suas aulas. Justificando que esses recursos tendem a propiciar o interesse dos alunos para o estudo e promover um entendimento significativo do conceito estudado. A autora deixa claro em sua proposta que os softwares são recursos que auxiliam o aprendizado dos alunos, que não resolvem os problemas, mas sim auxiliam na interação professor-aluno-software, permitindo um aprendizado colaborativo. Um estudo colaborativo tende a promover aos alunos reflexões sobre o tema, debates, trocas de saberes proporcionando o desenvolvimento do pensamento crítico.

Deseja-se que a atividade meu bairro no plano cartesiano, que está orientada para a interação do aluno com o simulador, proporcione aos alunos o mesmo sentimento de interesse pelo estudo observado no trabalho de Rocha (2013). Ainda, facilite ao aluno a compreender que os valores de referência do par ordenado possuem uma relação entre si e que variação quantitativa das variáveis envolvidas influenciam na localização do ponto no plano cartesiano.

5.3 ATIVIDADE: COMO B DEPENDE DE A.

5.3.1 Descrição da atividade

Atividade tem como objetivo de auxiliar os alunos a desenvolverem o pensamento funcional por meio da observação das variações ocorridas entre duas variáveis utilizando um *applet*. Para alcançar este objetivo será utilizado como recurso o jogo: Como b depende de a . Este recurso foi desenvolvido por Dirce Uesu Pesco e Humberto José Bostolossi. Este recurso encontra-se no repositório da Universidade Federal Fluminense (UFF) onde também encontram-se mais informações sobre o recurso no menu inicial da página.

Deseja-se que ao final da atividade os alunos tenham desenvolvido a habilidade em perceber que as mudanças de uma variável são coordenadas com mudanças em outra, por meio da observação da transformação da variável b gerada pela movimentação da variável a , permitindo assim generalizar e expressar algebricamente as funções geradas por estas variações.

Essa atividade foi elaborada utilizando um simulador como recurso para o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, a seguir apresenta-se uma reflexão a partir do estudo de Forsan (2017) que utilizou simuladores como ferramenta auxiliar para o ensino de Matemática.

5.3.2 Estudo relacionado a atividade proposta no PE

Forsan (2017) apresenta uma pesquisa envolvendo alunos do 3º ano do ensino médio que desejaram participar de um grupo de estudo em horário extraclasse com a finalidade de aprofundar seus conhecimentos sobre modelos matemáticos apresentados no ensino médio. O objetivo do trabalho foi significar aos alunos modelos matemáticos derivados do cálculo diferencial e integral, já estudado pelos alunos com outra perspectiva. Os modelos matemáticos, mencionados para este estudo, são apresentados para resolução de problemas e exercícios nos livros didáticos com propósito do estudo de funções exponenciais, logarítmicas ou trigonométricas. A autora desenvolveu e aplicou uma sequência didática utilizando recursos tecnológicos, entre eles o GeoGebra como um simulador, a fim de oportunizar ao aluno a compreensão de modelos matemáticos que podem ser escritos em termos de equações diferenciais, cujas soluções são expressões frequentemente encontradas em livros didáticos. Em sua análise, a autora descreve que os recursos utilizados facilitaram a compreensão das informações e o desenvolvimento dos exercícios propostos. Ainda, descreve: “[...] o uso dos softwares e simuladores auxiliaram na visualização das informações e assimilação das mesmas, fato várias vezes mencionado por eles próprios, o que tornou a aula mais dinâmica e

produtiva.” (FORSAN, 2017 p. 168). Segundo a autora, a utilização de simuladores como recurso para o ensino, tende a ser um facilitador no processo de aprendizagem.

Com base nas reflexões de FORSAN (2017), sobre a utilização de simuladores para o ensino da matemática, deseja-se que o *applet* Como b depende de a seja um recurso que promova ao aluno a compreensão das relações existentes nas variáveis a e b por meio da transformação da variável b em consequência do movimento da variável a . Estas relações podem ser desenvolvidas fazendo comparações entre os valores das variáveis de modo linear numa mesma reta numérica. Esta ação permite aos alunos analisarem as relações envolvidas entre as variáveis de modo diferenciado, por meio da percepção das variações envolvidas linearmente numa reta numérica e não em eixos ortogonais como demonstrado na maioria dos recursos disponíveis para o estudo de funções. Desta maneira, espera-se que o recurso Como b depende de a auxilie aos alunos a desenvolverem a habilidade em perceber que as mudanças de uma variável são coordenadas com mudanças em outra.

5.4 ATIVIDADE: ANÁLISE DAS RELAÇÕES ENTRE VARIÁVEIS UTILIZANDO UM SIMULADOR TÁTIL.

5.4.1 Descrição da atividade

A atividade Análise das relações entre variáveis utiliza como recurso um simulador tátil, o qual a configuração dos pontos táteis representa uma curva gerada a partir de uma função, permitindo ao aluno identificar a relação existente entre as variáveis envolvidas por meio do sentido tátil e visual. A atividade tem o propósito em auxiliar os alunos a desenvolverem o pensamento funcional por meio da análise das variações ocorridas entre duas variáveis no gráfico. Esta atividade foi elaborada utilizando um simulador tátil que permite ao aluno fazer outro tipo de leitura além do visual, possibilitando que o aluno analise o gráfico da função com outro sentido, o tátil, para desenvolver a atividade. Ainda, a atividade propõe um estudo colaborativo de modo que os alunos trabalhem em grupo e desenvolvam reflexões sobre as relações existentes entre e nas variáveis envolvidas por meio da análise do gráfico da função apresentado no simulador.

A seguir apresenta-se uma reflexão a partir do estudo de Oliveira (2010) e Camacho (2012).

5.4.2 Estudo relacionado a atividade proposta no PE

Oliveira (2010) buscou verificar se um conjunto de atividades, com o objetivo de introduzir o conceito de Função, desenvolvidas para alunos sem limitações visuais podem ser utilizadas com alunos que apresentam limitações visuais. O autor descreve que no conjunto de atividades foram realizadas algumas adaptações intrínsecas à falta de visão. A pesquisa foi desenvolvida com sete alunos do 9º ano do ensino fundamental, dos quais três alunos cegos e quatro alunos com baixa visão, todos frequentam o Instituto Benjamin Constant, uma tradicional instituição de ensino para pessoas com deficiências localizada no bairro da Urca, na cidade e estado do Rio de Janeiro. Como os participantes da pesquisa apresentam alguma deficiência visual, o conjunto de atividades apresentava recursos táteis como materiais impressos em Braille, figuras recortadas em EVA, Geoplano entre outros e em alguns momentos o sistema DOSVOX. Nas considerações sobre o material didático, o autor descreve que alguns materiais desenvolvidos e aplicados no estudo promoveram atividades mais dinâmicas e eficientes, permitindo a interação e motivação dos alunos no estudo. Ainda destaca que a atividade que solicitava a construção do gráfico no Geoplano proporcionou a análise de cada ponto no gráfico, permitindo a compreensão das variáveis envolvidas.

Camacho (2012) desenvolveu sua pesquisa utilizando três propostas de trabalho, sendo uma com alunos do 7º ano e duas com alunos do 8º ano. As propostas tinham o objetivo de analisar e compreender de que maneira os materiais manipuláveis podem auxiliar para a aprendizagem de Matemática. Ainda, relata que as atividades foram elaboradas a fim de motivar os alunos para o estudo, desenvolver capacidades e habilidades essenciais para compreensão e estruturação dos conceitos de par ordenado, de referencial cartesiano, de congruência de triângulos e de multiplicação de polinômios. Vale destacar que além dos recursos manipuláveis também há atividades que devem ser desenvolvidas com auxílio de outros recursos como: jogos, *applets*, vídeos, softwares interativos, quadro interativo entre outros.

Dentre as atividades propostas para os alunos do 7º ano, evidencia-se a apresentada na unidade temática 4, que corresponde às Funções. Salienta-se, em virtude desta atividade apresentar um modelo compatível com uma proposta apresentada no PE desta dissertação. Conforme a autora, a atividade inicia-se com o estudo do referencial cartesiano, utilizando como recurso o jogo batalha naval. O objetivo do uso desse recurso consiste na localização de pontos no plano. Em sequência desse estudo, utilizou o Geoplano como ferramenta auxiliar

para a introdução de par ordenado. Nesta atividade a autora enfatiza que a manipulação do Geoplano possibilitou um estudo de modo exploratório e divertido, promovendo a autonomia do aluno para o seu aprendizado.

A autora relata que o material manipulável exerce uma função de instrumento de exploração, investigação e descoberta. Sendo assim, o recurso assume o papel de suporte para uma aprendizagem da Matemática de modo que possibilite ao aluno estabelecer a ligação entre o concreto e o abstrato. Aqui é interessante destacar que a manipulação do material concreto pode ser um recurso que auxilie o aluno a construir propriedades dos conceitos de modo intuitivo possibilitando o desenvolvimento do pensamento matemático. Segundo Dreyfus (2002) o pensamento matemático é desenvolvido pela interação entre processos de Representação e Abstração. Desse modo, o material concreto pode ser um recurso que possibilite aos alunos a agir intuitivamente, permitindo a interação entre os processos de representação e abstração, auxiliando-os a desenvolverem o pensamento funcional.

Seguindo com as reflexões da autora, o material manipulável permite que o aluno vivencie diversas experiências com diferentes graus de dificuldades, aprendendo a agir, comunicar, a raciocinar e resolver problemas. Desse modo, o recurso tende a auxiliar o aluno a se posicionar como agente central da sua aprendizagem, construindo e desenvolvendo o seu aprendizado, mediado pelo professor.

Assim, dentre as atividades elaboradas para o PE desta dissertação, evidencia-se a proposta que utiliza o simulador tátil a fim de propor uma reflexão sobre os objetivos pressupostos a ele. Do mesmo modo que as ações, interpretações e as assimilações que o Geoplano oportunizou aos alunos no estudo de Oliveira (2010) e Camacho (2012), deseja-se que o simulador tátil, apresentado no PE deste estudo, exerça benefícios de aprendizagem semelhantes aos que Oliveira (2010) e Camacho (2012) apresentaram. De modo que o simulador tátil oportunize ao aluno um estudo que viabilize além da percepção visual, das relações existentes nas variáveis da atividade proposta, permita também a apreensão tátil por meio da manipulação do recurso tecnológico.

5.5 ATIVIDADE: CONSTRUTOR DE FUNÇÕES.

5.5.1 Descrição da atividade

Atividade Construtor de funções utiliza um simulador on-line permitindo a manipulação de uma máquina geradora de funções. Este recurso disponibiliza quatro diferentes telas simuladoras. Nesta proposta de trabalho utiliza-se diferentes telas propondo diferentes atividades, todas com o objetivo de auxiliar os alunos a desenvolverem o pensamento funcional por meio da observação das variações ocorridas entre duas variáveis. Este simulador encontra-se disponível no site da PhET Colorado. Deseja-se que, ao final da atividade, os alunos tenham a habilidade em definir a lei de formação das funções por meio da análise das relações que ocorrem nas variáveis, entre as variáveis utilizando o simulador Construtor de Funções.

A seguir apresenta-se uma reflexão a partir do estudo de Reis e Rehfeldt (2019), Moura e Lavor (2021) e Moura *et al.* (2020).

5.5.2 Estudo relacionado a atividade proposta no PE

Reis e Rehfeldt (2019) apresentam uma pesquisa utilizando o software de simulação PhET com objetivo de verificar como este recurso pode contribuir para o ensino e aprendizagem da multiplicação. O trabalho foi desenvolvido com nove alunos do sétimo ano do ensino fundamental que apresentavam dificuldades na aprendizagem de multiplicação. Os autores propuseram atividades de multiplicação para serem desenvolvidas com o auxílio do simulador Aritmética – Multiplicar, de modo que cada aluno utilizou um computador, entretanto foi destacado que os alunos foram instigados a interagirem com seus colegas para proporcionar um aprendizado colaborativo. Como técnica de coleta de dados, os autores utilizaram registros em diário de bordo em cada encontro e aplicação de um questionário ao final do projeto com a finalidade de verificar o sentimento dos alunos acerca da metodologia desenvolvida. Os autores descrevem que a metodologia desenvolvida proporcionou verificar o envolvimento dos alunos nas atividades, a autonomia no aprendizado e a interação dos alunos com seus colegas. Atitudes que demonstram a motivação dos alunos em querer aprender, ação propiciada pelo uso do recurso, como justificam os autores. Assim, os autores concluem que o simulador contribuiu para o aprendizado da multiplicação. Entretanto salientam que o recurso deve estar associado a um planejamento que propicie o aprendizado ao aluno tendo o professor como mediador no processo de aprendizagem, pois a este recurso é uma ferramenta de auxílio para o aprendizado.

Moura e Lavor (2021) apresentam uma Sequência de Ensino Investigativo (SEI) no estudo interdisciplinar de Trigonometria com a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos, utilizando um simulador como objeto de aprendizagem. Os autores procuraram verificar de que maneira simulador de Adição de Vetores da Plataforma PhET pode auxiliar no estudo das Leis dos Senos e Cossenos de modo interdisciplinar, associado à disciplina de Física. Os autores desenvolveram uma SEI seguindo os fundamentos de Carvalho (2013):

[...] sequências de atividades (aulas) abrangendo um tópico do programa escolar em que cada uma das atividades é planejada, sob o ponto de vista do material e das interações didáticas, visando proporcionar aos alunos: condições de trazer seus conhecimentos prévios para iniciarem os novos, terem ideias próprias e poder discuti-las com seus colegas e com o professor passando do conhecimento espontâneo ao científico e tendo condições de entenderem conhecimentos já estruturados por gerações anteriores. (CARVALHO, 2013 apud MOURA e LAVOR, 2021 p. 6 e 7).

Assim, os autores utilizaram quatro etapas na Sequência de Ensino Investigativo, sendo elas: Apresentação e exposição do conteúdo; Experimentação teórica; Experimentação prática; Avaliação. Diante da análise dos resultados e discussões, promovidos pelo desenvolvimento da SEI, os autores consideram que a utilização do simulador apresentou resultado positivo. De modo que, este recurso possibilitou aplicações concretas e visualmente possíveis de serem demonstradas, auxiliando o estudante a compreender as definições e permitindo sua participação ativa no processo de aprendizagem. Ainda, os autores destacam que o desenvolvimento das atividades contribuiu na interação efetiva nas relações estudante-estudante e estudante-pesquisador durante o desenvolvimento das atividades.

Moura *et al.* (2020) apresentam uma sequência de ensino investigativa interdisciplinar de trigonometria aplicada ao lançamento de projéteis. Como recurso para o desenvolvimento das atividades, os autores utilizaram o simulador Lançamento de projéteis da plataforma PhET. Para a investigação, os autores desenvolveram uma sequência apresentada com as seguintes etapas: Apresentação do conteúdo da trigonometria e do simulador; Uso do simulador com equações aleatórias a fim compreensão do aluno sobre a necessidade de cálculos para alcançar o objetivo; Desenvolvimento de exemplos práticos que utilizam a equação de lançamento de projéteis e aplicação das soluções encontradas no simulador; Resolução de atividades com apresentação dos cálculos desenvolvidos e aplicação das respostas encontradas no simulador; Resolução de um questionário a fim de analisar o sentimento dos alunos sobre a metodologia de ensino desenvolvido. Conforme considerações dos autores, a utilização do simulador proporcionou aos alunos a visualização do conteúdo,

que utiliza a trigonometria e se estabelece com a própria física e matemática, desenvolvido em sala de aula de modo prático. Ainda, concluem que a tecnologia educacional facilita o ensino e a aprendizagem por meio de demonstrações reais dos conteúdos envolvidos, desde que combinadas com um plano estruturado e sigam a sequência de ensino.

Segundo os autores Reis e Rehfeldt (2019), Moura *et al.* (2020) e Moura e Lavor (2021) a utilização de simuladores da plataforma PhET como recurso pedagógico, tende a contribuir didaticamente para o ensino da matemática desde que aliado a um planejamento estruturado e seguindo de uma sequência de ensino. Conforme análises dos autores, a metodologia adotada promoveu o envolvimento do aluno no estudo, permitiu uma ação autônoma e ativa do aluno no processo de aprendizagem, estimulou e motivou os alunos a aprender, proporcionou a visualização de modo prático do conteúdo favorecendo a compreensão dos assuntos estudados, permitiu interação efetiva nas relações estudante-estudante e estudante-pesquisador. Em decorrência das situações apresentadas pelos autores, deseja-se que a atividade Construtor de funções propicie aos alunos feitos análogos apresentados por Reis e Rehfeldt (2019), Moura *et al.* (2020) e Moura e Lavor (2021).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho consiste em apresentar uma análise sobre uma sequência didática que objetiva o aprendizado de funções, orientado pelas relações existentes nas variáveis e entre as variáveis da função. Anteposto à análise, foi realizado um estudo bibliográfico a fim de contribuir nas reflexões sobre a necessidade de se pensar em metodologias de ensino que visem um aprendizado significativo de funções. A pesquisa teórica aponta que é pertinente que as ações para o ensino de funções privilegiem o desenvolvimento do pensamento covariacional dos alunos, assim permitindo um aprendizado significativo de modo que possibilite minimizar possíveis dificuldades aos alunos em estudos posteriores.

Considerando os estudos realizados sobre ensino e aprendizagem de funções: evidencia-se que as atividades apresentadas na sequência didática desta pesquisa foram elaboradas a fim de auxiliar o desenvolvimento do pensamento funcional dos alunos, utilizando recursos que proporcione aos alunos analisarem e perceberem a proporcionalidade, interdependência as variações que ocorrem nas variáveis e entre as variáveis envolvidas nas atividades propostas. Ainda, as atividades estão associadas a objetos de aprendizagens que tendem proporcionar o interesse dos alunos ao estudo. Procurou-se desenvolver a sequência didática para um estudo colaborativo e significativo ao aluno, com propostas de atividades diferenciadas do modo que os estudos de funções são apresentados na maioria das vezes nos modelos didáticos. A partir da estruturação da sequência didática, que visa o aprendizado dos alunos por meio da análise das relações entre as variáveis e nas variáveis envolvidas nas atividades propostas com auxílio de simuladores, propôs-se a relação de cada atividade com atividades disponíveis em repositórios educacionais com estratégias semelhantes à da nossa proposta. Essas relações permitiram reflexões acerca das atividades as quais consideramos que:

- O jogo inserido num processo pedagógico proporciona ao aluno o sentimento de brincadeira que pode favorecer o seu aprendizado, pois diferencia-se de estratégias de ensino que prima pela explanação de conceitos pelo professor e resolução de atividades. Essas ações podem proporcionar o desinteresse dos alunos no estudo. Assim, utilizar o jogo como um recurso para o ensino pode oportunizar aos alunos o estudo dos conceitos de modo lúdico despertando-lhes o interesse em aprender.
- Estratégias que utilizem a TICs associadas a ações que pertençam ao cotidiano e ao meio ambiente do aluno, favorece o interesse do aluno ao estudo. É notório que os

alunos estão cada vez mais conectados e interessados nas tecnologias de informação. Utilizar as TICs como recursos para o ensino da matemática pode instigar os alunos ao estudo. Assim, permitindo que os alunos sejam protagonistas do seu aprendizado, visto que estes recursos podem proporcionar aos alunos a observação dos conceitos matemáticos de modo interativo oportunizando um estudo dinâmico dos conceitos matemáticos.

- A interação dos alunos com os simuladores viabiliza um estudo num ambiente dinâmico e interativo. Estas condições podem motivar e incentivar os alunos ao estudo, colocando-os numa situação ativa no processo de aprendizagem. Propor metodologias associadas a recursos que possibilitem aos alunos a representar situações matemáticas por meio da observação, permite que os alunos construam uma estrutura um modelo matemático da situação estudada. Este processo de estruturação dos conceitos favorece um aprendizado significativo ao aluno. Assim, os simuladores são recursos que possibilitam esta representação viabilizando a abstração dos conceitos estudados.
- Atividades pedagógicas que disponibilize recursos educacionais manipuláveis a fim de auxiliar os alunos a observar e analisar conceitos matemáticos oportunizando o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, podem ser um aliado no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Pois, o pensamento matemático permite aos alunos a desenvolverem esquemas abstratos como perceber a proporcionalidade, a interdependência e a variabilidade envolvida nas variáveis no estudo de funções proporcionando a compreensão de função aos alunos. Neste sentido, entende-se que os recursos educacionais que ofereçam o sentido tátil (manipulável) podem propiciar aos alunos interpretações, assimilações do estudo de funções de modo exploratório, permitindo uma aprendizagem autônoma e ativa.

Com base nas reflexões sobre as relações apresentadas, podemos conjecturar que as atividades propostas sejam favoráveis para o aprendizado dos alunos. Consideramos que as estratégias para aprendizagem de funções desenvolvidas neste trabalho sejam oportunas para os objetivos desejados, pois seguimos estudos Palis (2013), Neto e Rezende (1998), Rezende et al. (2016), Mestre (2014) e Yuniat et al. (2019) que registraram a importância do pensamento funcional para o aprendizado de funções. Ainda, ponderamos que as atividades permitem aos alunos compreenderem os processos envolvidos nas representações e nas

abstrações dos conceitos matemáticos, como Dreyfus (2002) descreve sobre o pensamento matemático.

É importante destacar que as atividades foram discutidas no grupo de orientação e nos seminários do PPGSTEM-UERGS, as quais foram apreciadas pelos pares envolvidos. Assim, consideramos que a sequência didática, que compõe o produto educacional anexo nesta dissertação, cumpre com os objetivos de pesquisa desejados e apresentamos como elaborar um produto educacional que estimule o aluno a desenvolver o pensamento funcional orientado para o ensino de funções, seguindo fundamentações teóricas sobre o ensino de funções.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Rui. **Oração aos moços**. 5. ed. Rio de Janeiro: Fundação Casa Rui Barbosa, 1997. 52 p. ISBN 85-7004-187-X. Disponível em: <https://www.migalhas.com.br/arquivos/2021/3/67EAFA6D4D04FB_Oracao-aos-Mocos.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2021

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em 07 ago. 2020.

_____. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 10 set. 2020.

BLANTON, Maria *et al.* **The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade**. Mathematics Education, V. 46, no. 1, 39–87, 2015. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/10.5951/jresematheduc.46.1.0039>>. Acesso em: 16 dez. 2020.

BRAGA, Juliana Cristina; MENEZES, Lilian. **Introdução aos Objetos de Aprendizagem**. In: Juliana Cristina Braga. (Org.). **Objetos de Aprendizagem Volume I - Introdução e Fundamentos**. 1ed. Santo André: Editora da UFABC, 2015, v.1. E-book 157 p. Disponível em: <pesquisa.ufabc.edu.br/intera/?page_id=370>. Acesso em 10 de nov. de 2020.

CARAÇA, Bento Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 1. ed. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951. 319 p.

CAMACHO, Mariana Sofia Fernandes Pereira. **Materiais Manipuláveis no Processo Ensino/ Aprendizagem da Matemática: Aprender explorando e construindo**. Orientador: Elsa Maria dos Santos Fernandes. 2013. Relatório de Estágio (Mestrado) - Universidade da Madeira, [S. l.], 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10400.13/373>. Acesso em: 22 set. 2021.

CARMO, Waldirene Ribeiro do. **Cartografia tátil escolar: experiências com a construção de materiais didáticos e com formação continuada de professores**. 2010. Dissertação (Mestrado em Geografia Física) – Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em <<https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/8/8135/tde-08032010-124510/pt-br.php>> Acesso em 15 de abr. 2021.

CARLSON, Marilyn; JACOBS, Sally; COE, Ted; LARSEN, Sean; HSU, Eri. **Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study.** *Journal for Research in Mathematics Education*. V. 33, no. 5, p. 352 -378, 2002. Disponível em < www.jstor.org/stable/4149958 >. Acesso em 12 set. 2020.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto.** / John W. Creswell; tradução Luciana de Oliveira da Rocha. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007. 248 p.

COMO B DEPENDE DE A. **Universidade Federal Fluminense.** Disponível em: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/c1d/c1d-html/c1d-br.html> Acesso em: 14 nov. 2021.

CONSTRUTOR DE FUNÇÕES. **Phet Interactive Simulations. University of Colorado Boulder.** Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/function-builder/credits Acesso em 16 jan. 2022

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, volume único: livro do professor.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2005. 264 p.

DEMO, Pedro. **Ser professor é cuidar que o aluno aprenda.** 7. ed. Porto Alegre: Mediação, 2010. 87 p.

DA SILVA, Aparecida Francisco; KODAMA, Helia Matiko Yano. Jogos no ensino da Matemática. **II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**, p. 1-19, 2004. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Matiko.pdf>. Acesso em 20 de nov. de 2021.

DREYFUS, T. **Advanced Mathematical Thinking Processes.** In: Tall D. (eds) *Advanced Mathematical Thinking*. Mathematics Education Library, vol 11. Springer, Dordrecht. 2002. p. 25-41 Disponível em: <https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_2> Acesso em: 15 jan. 2021

FORSAN, Juliana Froes. **Estudo e aprofundamento de alguns modelos matemáticos apresentados no ensino médio.** Orientador: Prof. Dr. Rawlilson de Oliveira Araújo. 2017. 180 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas., Rio Claro, 2017. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/151705>>. Acesso em: 16 nov. 2021.

HENDRES, Claudia Assis; KAIBER, Carmen Teresa. **A utilização da informática como recurso didático nas aulas de Matemática.** Revista de Ensino de Ciências e Matemática. v.7, n 1, p. 25-38. jan./jun. 2005. Disponível em: <<http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/185>>. Acesso em 20 out. de 2019.

KRÜGER, Katja. **Functional Thinking: The History of a Didactical Principle.** In: Weigand HG., McCallum W., Menghini M., Neubrand M., Schubring G. (Org). The Legacy of Felix Klein. ICME-13 Monographs. Springer, 2019. E-book 226 p. Disponível em <https://doi.org/10.1007/978-3-319-99386-7_3>. Acesso em 10 de out. de 2020.

LIMA, Telma Cristiane Sasso de; MIOTO, Regina Célia Tamasso. **Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica.** Revista Katálysis, v. 10, n. spe, pp. 37-45, set. 2017. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rk/a/HSF5Ns7dkTNjQVpRyvhc8RR/#ModalArticles>. Acesso em: 5 ago. 2021

MESTRE, Célia Maria Martins Vitorino. **O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade:** Uma experiência de ensino. Orientador: Hélia Margarida Oliveira. 2014. 357 p. Tese (Doutora) - Universidade de Lisboa Instituto de Educação., Lisboa, 2014. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/305776490_O_desenvolvimento_do_pensamento_algebrico_de_alunos_do_4_ano_de_escolaridade_Uma_experiencia_de_ensino. Acesso em: 4 out. 2021.

MOREIRA, Marco Antônio. **Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares.** 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011. 179 p.

MOREIRA, Marco. Antônio. **APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA: UM CONCEITO SUBJACENTE,** 1997. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/~moreira/apsigsubport.pdf>>. Acessado em 12 de jun. de 2021

MOURA, Eliane; BRANDÃO, Edemilson. **O uso das tecnologias digitais na modificação da prática educativa escolar.** Revista Científica Fazer, Erechim, n. 129, p.1-17, 2013. Disponível em:< <https://docplayer.com.br/5008361-O-uso-das-tecnologias-digitais-na-modificacao-da-pratica-educativa-escolar-use-of-digital-technologies-in-education-school-modification-of-practice.html>> Acesso em: 25 set. 2019.

NETO, Tharcílio Alexandre de Queiroz Ferreira; REZENDE, Wanderley Moura. **INTERPRETAÇÕES DO CONCEITO DE FUNÇÃO.** Caderno Dá Licença, RJ, v. 1, n. 1, ed. 1, 12/1998 1998. Disponível em: <http://dalicenca.uff.br/projetos/caderno/>. Acesso em: 10 jul. 2021.

OGLIARI, Lucas N. **A Matemática No Cotidiano E Na Sociedade: Perspectivas Do Aluno Do Ensino Médio**. 2008. 146 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da PUCRS, [S. l.], 2008. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10923/3074>>. Acesso em: 12 maio 2021.

OLIVEIRA, Heitor Barbosa Lima de. **Introdução ao conceito de função para deficientes visuais com auxílio do computador**. Orientador: Claudia Coelho de Segadas Vianna. 2010. 110 p. Dissertação (Mestrado) - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, RJ, 2010. Disponível em: http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/MSc%2020_Heitor%20Barbosa%20Lima%20de%20Oliveira.pdf. Acesso em: 18 nov. 2021.

PACHECO, Marina Buzin; ANDREIS, Greice da Silva Lorenzetti. Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio. **Revista Principia - Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB**, [S.l.], n. 38, p. 105-119, fev. 2018. ISSN 2447-9187. Disponível em: <<https://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/view/1612>>. Acesso em: 20 jul. 2021.

PALIS, Gilda. **Atividades que podem propiciar o desenvolvimento do raciocínio funcional no alunado do ensino médio e universitário inicial**. Professor de Matemática On Line, São Paulo, v.1, n. 1, 2013. Disponível em <<https://www.ime.unicamp.br/~pulino/MA713/pagina/sbm-pmo-v001-n001-palis.pdf>>. Acesso em: 10 nov. 2019

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011. 136 p.
PERRENOUD, Philippe. **Dez novas competências para ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 2000. 192 p.

PECH, Víctor Javier Pech; ARJONA, María Guadalupe Ordaz. Análisis del discurso matemático escolar: Las producciones de los estudiantes sobre el concepto función en situaciones variacionales. *In*: SÁNCHEZ, Guadalupe Cabañas. **Análisis de la actividad matemática en el salón de clases. Un estudio socioepistemológico**. México: Patricia Lestón, 2010. v. 23, cap. 1, p. 15 - 22. ISBN 978-607-95306-1-7. Disponível em: https://www.academia.edu/352526/An%C3%A1lisis_de_la_actividad_matem%C3%A1tica_en_el_sal%C3%B3n_de_clases_Un_estudio_socioepistemol%C3%B3gico?bulkDownload=thisPaper-topRelated-sameAuthor-citingThis-citedByThis-secondOrderCitations&from=cover_page Acesso em: 19 maio 2021.

PICHARDO, Ivanovvna. M.Cruz.; PUENTE, ÁngelPuentes. **Innovación Educativa: Uso de las TIC en la enseñanza de la Matemática Básica**. EDMETIC, v. 1, n. 2, p. 127-144, 1 jul.

2012. Disponível em <<https://www.uco.es/ucopress/ojs/index.php/edmetic/article/view/2855>> Acesso em 25 mai. 2021.

PONTE, João Pedro da. **O conceito de função no currículo de Matemática**. Revista Educação e Matemática, APM, Portugal, n.15, p. 3-9, 1990. Disponível em <<http://hdl.handle.net/10451/4473>>. Acesso em: 15 set. 2019.

REIS, Erisnaldo Francisco; REHFELDT, Márcia Jussara Repp. Software PHET e Matemática: possibilidade para o ensino e aprendizagem da multiplicação. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 1, p. 194-208, 1 jan. 2019. Disponível em <<https://doi.org/10.26843/rencima.v10i1.1557>> Acesso em 10 de ago. 2021.

REZENDE, Wanderley Moura; DIAS, Natasha Cardoso; SILVA, Tayná. **Objetos de aprendizagem para o ensino de funções reais: uma contribuição para o saber pedagógico de conteúdo do professor de matemática**. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12, 2016, São Paulo. Jul. 2016. Disponível em <http://www.sbemrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6212_2631_ID.pdf>. Acesso em: 12 jan. de 2021.

ROCHA, Lúcia Andréia de Souza. **A Utilização de Softwares no Ensino de Funções Quadráticas**. Orientador: Dra. Cristiana Andrade Poffal. 2013. 120 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande – FURG Instituto de Matemática, Estatística e Física, Rio Grande, 2013. Disponível em: <https://profmatt.furg.br/images/TCC/TCC_Lucia_versaofinal_fichacatalografica.pdf> Acesso em: 18 nov. 2021.

SCHNEIDER, Cleussi. A deficiência física no contexto do processo de ensino e aprendizagem. In: SIÉCOLA, Marcia; SCHNEIDER, Cleussi. **Deficiência intelectual, física e psicomotora**. 1. ed. PR: Iesde Brasil S/A, 2017. cap. 5, p. 75-88. ISBN 978-85-387-6313-0.

THOMPSON, Patrick & CARLSON, Marilyn. **Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically**. In J. Cai (ED.), Compendium for research in mathematics education (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Disponível em <https://www.researchgate.net/publication/302581485_Variation_covariation_and_functions_Foundational_ways_of_thinking_mathematically>. Acesso em fev. de 2021.

VALENTE, José Armando. **A Comunicação e a Educação baseada no uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação**. Revista UNIFESO – Humanas e Sociais, v. 1, ed. 01, p. 141-166, 6 out. 2014. Disponível em: <<http://www.revista.unifeso.edu.br/index.php/revistaunifesohumanasesociais/article/view/17/0>> Acesso em: 20 jan. 2021.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. Tradução de: Maria da Pena Villalobos. 16 ed. São Paulo: Ícone, 2019. 228 p.

YUNIATI, Suci; NUSANTARA, Toto; SUBANJI, Subanji; SULANDRA, I Made. The Use of Multiple Representation in Functional Thinking. **International Journal of Recent Technology and Engineering (IJRTE)**, [s. l.], v. 8, p. 672 - 678, 2019. Disponível em: <https://www.ijrte.org/wp-content/uploads/papers/v8i1C2/A11120581C219.pdf>. Acesso em: 20 out. 2021

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar** [recurso eletrônico] /Antoni Zabala; tradução: Ernani F. da F. Rosa; revisão técnica: NalúFarenzena. Porto Alegre: Penso, 2014. 291. p.