UNIVERSIDADE ESTADUAL DO RIO GRANDE DO SUL
MESTRADO PROFISSIONAL EM DOCÊNCIA PARA CIÊNCIAS, TECNOLOGIAS, ENGENHARIA E MATEMÁTICA

CLARICE CACIANI TAUBE

O CONCEITO DE FUNÇÃO NO 9º ANO:

Construindo significados a partir do conceito de operador

GUAÍBA
2023

CLARICE CACIANI TAUBE

O CONCEITO DE FUNÇÃO NO 9º ANO:

Construindo significados a partir do conceito de operador

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Docência para Ciências, Tecnologias, Engenharia e Matemática da Universidade Estadual do Rio Grande do Sul, Unidade de Guaíba, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Formação Docente para Ciência, Tecnologias e Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Tânia Cristina Baptista Cabral

GUAÍBA

2023

Catalogação de publicação na fonte (CIP)

T223c Taube, Clarice Caciani

Conceito de função no 9º ano: construindo significados a partir do conceito de operador, O/ Clarice Caciani Taube – Guaíba-RS: Uergs, 2023.

119 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Rio Grande do Sul, Mestrado Profissional em Docência para Ciências, Tecnologias, Engenharias e Matemática, Unidade em Guaíba, 2023.

Orientadora: Prof.ª Dra. Tânia Cristina Baptista Cabral

1. Funções. 2. Pensamento matemático. 3. Operadores. I. Cabral, Tânia Cristina Baptista. II. Universidade Estadual do Rio Grande do Sul, Mestrado Profissional em Docência para Ciências, Tecnologias, Engenharias e Matemática, Unidade em Guaíba.

Marcelo Bresolin CRB 10/2136

CLARICE CACIANI TAUBE

O CONCEITO DE FUNÇÃO NO 9º ANO:

Construindo significados a partir do conceito de operador

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Formação Docente para Ciência, Tecnologias e Matemática na Universidade Estadual do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Prof. Dra. Tânia Cristina Baptista Cabral

Aprovada em 26 / 04 / 2023

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Prof.ª. Drª. Tânia Cristina Baptista Cabral
Universidade Estadual do Rio Grande do Sul – UERGS

Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende, docente
Universidade Federal Fluminense (UFF)

Prof. Dr. Eder Julio Kinast
Universidade Estadual do Rio Grande do Sul - UERGS

AGRADECIMENTOS

Aprendi desde criança que precisamos da ajuda e apoio de outros para crescer e evoluir. Em minha caminhada sempre pude contar com o apoio de pessoas muito especiais e sou muito grata por isso, pois sei que sozinha seria muito mais difícil. Na caminhada do mestrado não foi diferente, então agradeço a cada um que contribuiu nesse processo.

Na correria do dia a dia, vamos adiando alguns desejos; o mestrado foi um deles. Agradeço à minha colega de profissão e amiga Cristine Inês Steffeen que despertou essa vontade ao me convidar para participar do processo de seleção da UERGS.

Nem sempre é fácil sair da zona de conforto, por vezes nos sentimos incapazes de dar conta dos compromissos e atribuições, por isso gradeço à Júlia Taube do Amaral, minha primeira filha, por ser a grande incentivadora nesse processo, procurando inclusive um professor particular de Inglês. Foi então que me dei conta da semente que plantei, pois sempre incentivei elas a buscarem seus objetivos. À Laura Taube do Amaral, a filha mais nova, agradeço toda sensibilidade e carinho disponibilizados. Obrigada, filhas, vocês são o melhor de mim.

Agradeço ao meu esposo Mauro do Amaral pela compreensão nos momentos em que não pude estar junto.

Agradeço aos meus irmãos e sobrinhos pela torcida, incentivo e carinho demonstrado.

Ao meu pai Gustavo *(in memorian*) e minha mãe Neida *(in memorian*) por todo amor dado em vida, eles são minha base.

Obrigada a todos os alunos que tive durante minha vida profissional, todos foram importantes na caminhada.

Os colegas e amigos formam uma rede importante de apoio, obrigada aos meus colegas de orientação Cássia Munhoz, Cristiane Fuchs, Gisele Alves Luciano Coiro e Cláudia Rosa pelo companheirismo e aprendizado compartilhado. Obrigada também aos demais colegas do curso com quem pude compartilhar desafios e aprendizados.

Obrigada a todos os professores do PPGSTEM da UERGS que contribuíram para o meu crescimento intelectual e profissional; vocês formam a peça fundamental no processo. Agradeço muito a minha orientadora, Prof.ª Dra. Tânia Cristina Baptista Cabral, pelas orientações e sugestões, dedicação, paciência e ensinamentos que foram essenciais na realização deste trabalho.

Obrigada aos professores que fizeram parte da banca avaliadora, Prof.º Dr. Wanderley Moura Rezende e Prof.º Dr. Eder Julio Kinast, pelas sugestões e considerações necessárias e importantes para o trabalho.

RESUMO

Observando as dificuldades apresentadas pelos alunos dos anos finais do ensino fundamental referentes a conceitos primordiais para o pensamento funcional, lendo trabalhos e que apontam as dificuldades apresentadas por alunos do ensino superior quanto ao pensamento matemático avançado e ouvindo relatos de professores do ensino superior relacionados à dificuldade dos alunos para lidar com o conceito de operador, a presente pesquisa promove uma reflexão sobre o pensamento Matemático Avançado que tem em sua base o pensamento algébrico, o pensamento funcional e o conceito de operador. Esta pesquisa tem por objetivo investigar a possibilidade de construir o conceito de função em turmas de 9º ano do Ensino Fundamental, a partir de uma sequência de atividades, focando o conceito de operador funcional. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, aplicada e de análise das respostas dos alunos à intervenção didática na modalidade pesquisa-ação, em que o professor pesquisa sua própria sala de aula. Os procedimentos de pesquisa abrangem as pesquisas relacionadas com a problemática, estudo de teóricos de base, desenvolvimento e aplicação de uma sequência didática em turma de 9º ano de uma escola municipal de São Leopoldo-RS, elaboração do diário de campo como procedimento para coleta dos dados e participação em grupo de pesquisa-ação. Os resultados obtidos apontam que construir o conceito de função sob o aspecto de transformação via operador funcional pode ser favorável ao aprendizado dos alunos.

Palavras-chave: Funções. Pensamento matemático. Operadores.

ABSTRACT

Observing the difficulties presented by students in the final years of elementary school regarding primordial concepts for functional thinking, reading works that point out the difficulties presented by higher education students regarding advanced mathematical thinking and listening to reports from higher education teachers related to the difficulty of students to deal with the concept of operator, this research promotes a reflection on Advanced Mathematical Thinking that is based on algebraic thinking, functional thinking and the concept of operator. This research aims to investigate the possibility of building the concept of function, in 9th grade elementary school classes, from a sequence of activities, focusing on the concept of functional operator. It is a qualitative and applied research, and analysis of students' responses to the didactic intervention in the action-research modality, where the teacher researches his own classroom. The research procedures cover research related to the problem, study of basic theorists, development and application of a didactic sequence in a 9th grade class of a municipal school in São Leopoldo/RS, preparation of the field diary as a procedure for collecting the data and participation in an action research group. The results obtained indicate that building the concept of function under the aspect of transformation through a functional operator can be favorable to student learning.

Keywords: Functions. Mathematical thinking. Operators.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
NCTM	National Concil of Teacher of Mathematics
SAM	Solidarity Assimilation Methodology
PMA	Pensamento Matemático Avançada
PME	Psycology of Mathematics Education
GPA	Grupo de pesquisa-ação
CAPES	Coordenação de aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Para a elaboração desse trabalho, cabe ressaltar alguns pressupostos importantes: (1) No entendimento dessa pesquisadora, a sala de aula é um espaço de trabalho colaborativo. (2) Seguimos a máxima “o estudante aprende falando e o professor ensina ouvindo” (CABRAL; PAIS; BALDINO, 2019). (3) uma metodologia ativa possibilita o uso de estratégias, tanto no âmbito da didática quanto no âmbito da pedagogia, que permitam a realização da proposição anterior.

A fim de dissertar e sustentar teoricamente as reflexões apontadas acima, esta dissertação apresenta dois capítulos: Aspectos relevantes para a pesquisa sobre o Pensamento Matemático Avançado; Ensino e Aprendizagem: Reflexões acerca de uma abordagem metodológica.

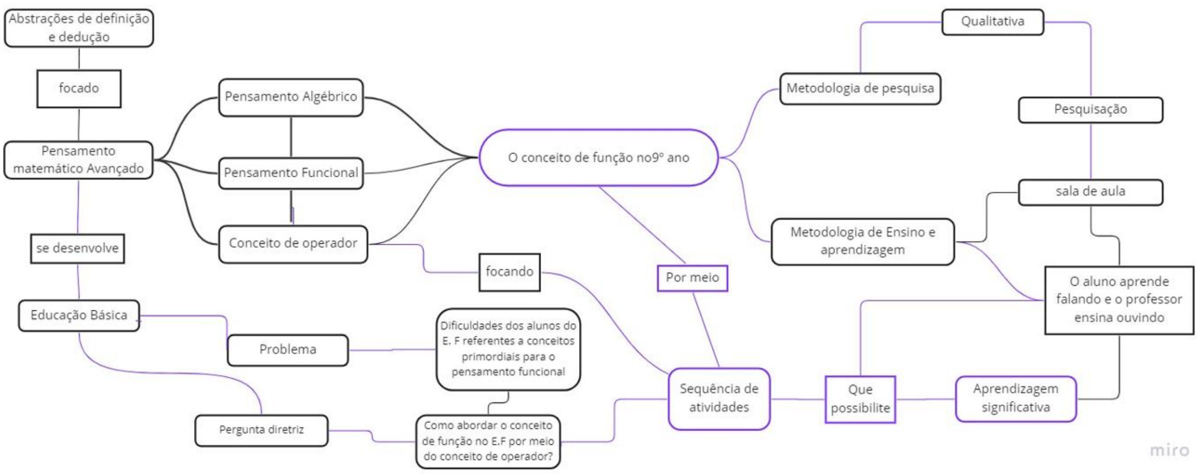
Ainda nesse estudo, apresentam-se os resultados da aplicação do PE anexo a esta pesquisa. O PE, que é apresentado no Apêndice, é uma sequência de atividades associada à noção de função sob o aspecto de transformação via operador.

A pergunta inicial que desencadeou a investigação foi: “Como abordar o conceito de função no Ensino Fundamental por meio do conceito de operador?”.

Como aporte teórico, apresenta-se o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, discutidos por Dreyfus (2002) e Tall (2002), pensamento este que tem em sua base o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, discutido por Kaput (1999), Ponte *et al* (2009), Carraher e Schliemann (2002); do Pensamento Funcional, discutido por Blanton (2015), Carraça (1998), Neto e Rezende (1998) e do Conceito de Operador, discutido por Vergnaud (2009), Kieren (1976, 1980) e documentos norteadores educacionais. Também apresenta-se uma reflexão sobre aprendizagem significativa, subsidiada por Moreira (2011), o papel da linguagem, ensino e aprendizagem referenciada por Vigotski (2009), a Metodologia da Assimilação Solidária, discutida por Cabral, Pais e Baldino (2019), o processo grupal discutido por Pichon- Rivière (2009). A metodologia de pesquisa adotada é qualitativa no formato pesquisa-ação, caracterizada como pesquisa participante, fundamentada por Minayo (1994), Thiollent (1986) e Lüdke (1986), seguindo os procedimentos metodológicos: levantamento documental e bibliográfico delineando a fundamentação teórica; desenvolvimento da sequência de atividades; aplicação da sequência de atividades na turma de nono ano; 4) análise e considerações das atividades aplicadas.

No Apêndice, encontra-se o PE elaborado para esta dissertação.

Figura 1 - Mapa da dissertação



Fonte: autoria própria.

1.1 O PROBLEMA DE PESQUISA

Caraça (1998, p. 118) justifica que os conceitos matemáticos surgem dos problemas de interesse capital, prático ou teórico. Segundo ele, a necessidade cria o instrumento.

As transformações tecnológicas, ao longo dos anos, vêm alterando as necessidades dos seres humanos e, por consequência, as competências que são necessárias desenvolver nos alunos em áreas fundamentais como a da Matemática. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998, p. 25), "com o advento da era da informação e da automação e com a rapidez, antes impensada, na realização dos cálculos numéricos ou algébricos, torna-se cada vez mais amplo o espectro de problemas que podem ser abordados e resolvidos por meio do conhecimento matemático". Esse conhecimento exige, por sua vez, um pensamento matemático cada vez mais complexo e abstrato.

Ponte (1990, p.3) aponta que o conceito de função é considerado um dos mais importantes em toda a matemática, sendo base para a matemática contemporânea, pois permeia vários campos direta ou indiretamente. Por exemplo, a Análise utiliza funções reais de uma ou mais variáveis, estudando suas propriedades do ponto de vista de convergência; o estudo de Equações Diferenciais se dedica à resolução de equações cujas incógnitas são funções; a Análise Funcional trata de espaços cujos elementos são funções; a Análise Numérica estuda o processo de controlar erros na avaliação de todos os tipos de funções, bem como a lógica utiliza funções recursivas.

Como docente, percebo dificuldades dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental na compreensão dos conteúdos relacionados com a Álgebra e a conceitos primordiais para o pensamento funcional. Muitos relatam ter deixado de gostar de matemática quando surgiram as “letras”. Após ingressar no Mestrado, a convite da professora orientadora, comecei a participar dos encontros no Grupo de pesquisa-ação GPA - Remoto, grupo esse onde os professores pesquisam sua própria sala de aula. Nesses encontros, professores do ensino superior têm discutido a dificuldade dos alunos para lidar com o conceito de operador.

Tomando como ponto de partida tal problemática, percebe-se a necessidade de abordar o conceito de operador ainda no Ensino Fundamental, onde é tratado como função. (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2002)

A seguir, farei um breve relato sobre a motivação para a construção dessa pesquisa.

1.2 JUSTIFICATIVA

Minha experiência profissional é no Ensino Fundamental da Educação Básica e, como o próprio nome diz, é a base da educação e período da vida em que cada indivíduo forma sua base de conhecimentos. Enquanto professora, avalio constantemente meu trabalho em sala de aula, buscando sempre a melhora da qualidade do ensino. Trabalhar com crianças e adolescentes torna possível a percepção de que grande parte dos educandos, ao longo dos anos que permanecem na escola, vão perdendo o interesse em investigar e em procurar saber o porquê das coisas. Talvez um dos fatores que contribua para isso seja a maneira mecânica e descontextualizada de trabalhar os conteúdos matemáticos na Educação Básica, principalmente no que diz respeito aos conteúdos algébricos, que se tornam - para a maioria dos alunos - um amontoado de letras sem significado e sem importância futura. Sadovsky (2010, p. 13) entende que os profissionais que atuam nas escolas precisam refletir sobre os fundamentos do trabalho de ensinar matemática no século XXI, que é necessário repensar a escola e que isso é um projeto essencialmente didático.

Henriques (2010), em sua tese de doutorado, aponta que a permanência do jovem no ensino superior é crucial na preparação para o mundo do trabalho e essa fase é marcada por uma gama de conhecimentos que requerem ferramentas matemáticas mais complexas devido, sobretudo, aos avanços tecnológicos. A autora sinaliza que a falta de compreensão por parte dos alunos em conceitos elementares compromete a aprendizagem de conceitos mais complexos e isso pode gerar motivo de insucesso para muitos.

Esse problema também é apontado por Cabral (2022), em seu projeto de pesquisa intitulado *Epistemology of Mathematical Education in Engineering: Building bridges between Calculus and Engineering*, a descontinuidade na passagem do ensino básico para o ensino superior. Segundo a pesquisadora, alunos de disciplina de Cálculo acabam desistindo do curso porque, além das dificuldades inerentes à disciplina, trazem consigo grandes lacunas de aprendizagem referentes a conceitos básicos da Matemática.

Diante dessas inquietações, ensinar funções, por meio do conceito de operador funcional, pode contribuir na superação das lacunas apontadas por Cabral (2022) em seu projeto de pesquisa.

Para direcionar a pesquisa, trago o seguinte questionamento: Como abordar o conceito de função no Ensino Fundamental por meio do conceito de operador?

1.3 OBJETIVOS

A presente pesquisa tem por objetivo principal investigar a possibilidade de construir o conceito de função em turmas de 9º ano do Ensino Fundamental a partir de um conjunto de atividades, focando o conceito de operador funcional. Essas atividades estão organizadas no formato de uma sequência didática, constituindo o Produto Educacional (PE) da pesquisa.

Os objetivos específicos da pesquisa são:

a) Trabalhar com os alunos a ideia de transformações por meio de atividades envolvendo máquinas que transformam;
b) Estimular nos alunos o entendimento do operador como o responsável pelas transformações das entradas;
c) Trabalhar para que os alunos percebam os diferentes tipos de operadores nas atividades propostas;
d) Por meio das atividades, construir a ideia de função como operador que transforma.

No próximo capítulo, será apresentada a fundamentação teórica que servirá de base para a pesquisa. Destacamos algumas ideias de pesquisadores que discutem o pensamento matemático avançado, considerado necessário para a compreensão e aprendizagem de matemática no ensino superior.

2 ASPECTOS RELEVANTES PARA A PESQUISA SOBRE PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Pensamento Matemático Avançado teve origem na década de 1980, no decorrer do evento *The International Group for the PME (Psychology of Mathematics Education)*, que teve como objetivo produzir uma obra focada no Pensamento Matemático Avançado, tendo como consequência a criação do *Advanced Mathematical Thinking Group*. (IGLIORI; ALMEIDA, 2013).

Tall (2002) afirma que o Pensamento Matemático Avançado (PMA) está presente na aprendizagem de muitas definições matemáticas complexas que podem aparecer nos diferentes níveis escolares, manifestando-se com maior intensidade nos anos finais do ensino médio e ao longo do ensino superior.

Em Tall (2002), o autor aponta que compreender como e por que as pessoas desenvolvem o pensamento matemático de diferentes maneiras e qual a relação com o desenvolvimento cognitivo da criança tem sido objeto de estudo por bastante tempo. Conforme as diferentes maneiras de operar, juntamente com os diferentes padrões de validade e verdade, o autor estabeleceu grupos, que chamou de três mundos da matemática.

Tall (2002, p. 5) descreve que o mundo corporificado é baseado na percepção das propriedades dos objetos físicos; o mundo conceitual dos símbolos é aquele em que os conceitos são formados em um processo crescente, e ele exemplifica que o processo de contagem usa símbolos que possibilitam pensar como conceito de número. Esses processos evoluem para os cálculos aritméticos, o desenvolvimento do pensamento algébrico, até chegar no mundo formal que usa as experiências dos dois mundos anteriores para construir o mundo da definição formal e da prova.

Dreyfus (2002) apresenta, em seu estudo, os processos que envolvem o pensamento matemático avançado e, segundo ele, esses processos são matemáticos e psicológicos, pois a compreensão acontece na mente do aluno. O autor aponta que apresentar definições de conceitos matemáticos abstratos aos alunos não proporcionará o seu aprendizado, já que esse processo parte da ação do aluno quando ele constrói propriedades dos conceitos por meio das deduções de definições. Dreyfus (2002) justifica que essas deduções são desenvolvidas por meio do pensamento matemático, que consiste na interação entre processos de Representação e Abstração. Ele explica, ainda, que esses processos podem ser desenvolvidos tanto no pensamento matemático elementar quanto no pensamento matemático avançado: “Não há distinção nítida entre muitos dos processos do pensamento matemático elementar e avançado, embora a matemática avançada seja mais focada nas abstrações de definição e dedução" (DREYFUS, 2002, p. 26, tradução nossa)[1]. O autor aponta que a maneira de gerenciar a complexidade é o que diferencia o pensamento avançado do elementar (DREYFUS, 2002).

O problema é que os alunos, em grande parte, não desenvolveram o pensamento matemático avançado ao longo de sua escolarização, dificultando, assim, o processo de compreensão e aprendizagem. Selden, Mason e Selden (1989 *apud* DREYFUS, 2002) traz o resultado de um estudo com alunos aprovados em um curso tradicional de cálculo do primeiro trimestre na *Tennessee Technological University*. Os alunos em questão eram considerados bem preparados no Ensino Médio, mesmo assim apresentaram dificuldades em resolver problemas apresentados de maneira um pouco diferente do que estavam acostumados a resolver. Dreyfus (2002) esclarece que isso costuma acontecer porque a maior parte dos alunos, desde o ensino fundamental até a universidade, aprende a realizar nas aulas de matemática um grande número de procedimentos padronizados, porém o que falta é saber usar seus conhecimentos de maneira flexível para resolver um problema desconhecido. Em oposição a essas atividades padronizadas, o autor em questão indica a reflexão sobre a própria experiência matemática como uma alternativa possível. O autor sinaliza que, após resolver um problema, é interessante que o aluno pense ou conte aos demais como resolveu o problema e que tal reflexão é uma característica do pensamento matemático avançado.

Powell e Bairral (2014) também entendem que as pessoas aprendem por meio das reflexões sobre suas experiências. "A reflexão sobre os atos mentais pode gerar representações e heurísticas para o aprendiz desenvolver maneiras mais eficazes de pensar" (POWELL; BAIRRAL, 2014 p. 53-54). Eles apontam a escrita como um instrumento importante de reflexão sobre o pensamento, pois por meio dela os alunos têm a oportunidade de analisar seu processo de pensamento, os significados construídos e as formas de raciocínio matemático presentes.

Nas seções seguintes, destacamos algumas ideias de pesquisadores que discutem o desenvolvimento do pensamento algébrico, do pensamento funcional e do conceito de operador matemático, todos estes primordiais para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado.

---

[1] There is no sharp distinction between many of the processes of elementary and advanced mathematical thinking, even though advanced mathematics is more focussed on the abstractions of definition and deduction.

2.1 PENSAMENTO ALGÉBRICO

Como já mencionado, o fato de atuar como professora nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental permitiu perceber o declínio no entusiasmo em aprender matemática, por parte de muitos alunos, ao longo de sua escolarização, sendo que o relato de ter deixado de gostar de matemática quando iniciaram os cálculos com as letras é frequente. Tais relatos podem denunciar a maneira como a Álgebra vem sendo trabalhada nas escolas, dando mais ênfase aos aspectos técnicos, focada principalmente nos símbolos e deixando de lado, na maioria das vezes, o desenvolvimento dos conceitos e do pensamento mais abstrato. É o que Ribeiro e Cury (2015) apontam como resultados de algumas pesquisas realizadas com professores de Matemática.

Ainda segundo Ribeiro e Cury (2015 p.5), a Álgebra é um ramo da matemática que é objeto de pesquisa desde que a humanidade se debruçou sobre a realidade para construir seu conhecimento, até chegar às abstrações que permitem novos olhares sobre cada conceito criado e, portanto, está em constante evolução. Segundo esses autores, a Álgebra deveria ser desenvolvida nas escolas desde os anos iniciais, já que faz parte dela um conjunto de processos e pensamentos que pode ter início com experiências contendo números, padrões, entes geométricos e análise de dados. É o que recomenda a BNCC, apontando que o trabalho com a Álgebra esteja presente já nos anos iniciais, com "ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades de igualdade" (BRASIL, 2018, p. 270), podendo ser desenvolvido juntamente com o ensino da aritmética.

Ponte *et al.* (2009 p.7) apontam que há séculos os objetos fundamentais da Álgebra eram expressões e equações, mas que no século XXI - no centro da Álgebra - estão as relações matemáticas abstratas, que podem ser expressas por equações, inequações ou funções. Isso se deu ao fato de que os estudos das equações algébricas não deram mais conta de resolver equações de grau superior a quatro, assim a atenção dos matemáticos se voltou para o estudo de equações diferenciais, equações envolvendo funções, estruturas abstratas como espaço vetorial, anel e corpo.

O que se tem percebido na realidade das escolas, segundo Ponte *et al.* (2009 p. 8-9), é que a Álgebra continua sendo trabalhada priorizando o trabalho com expressões e desconsiderando, assim, outros aspectos importantes como: resolução de problemas, relações, estruturas algébricas e o estudo de funções. Apontam, também, para o fato da utilização dos símbolos como recurso para o ensino dos conteúdos algébricos, o que pode se tornar incompreensível para os alunos, dependendo da abordagem, parecendo para estes um amontoado de letras sem significado, que serve apenas para aqueles que utilizarão matemática no ensino superior.

Para Kaput (1999 p. 133), a Álgebra aprendida e ensinada nas escolas da maneira tradicional é um conjunto de regras e procedimentos que, na maioria das vezes, não tem ligação com outros conteúdos matemáticos ou com situações da vida real. Para o autor, essas atividades não possibilitam aos estudantes raciocinar e refletir sobre aquilo que estão aprendendo, se tornando a Álgebra que a grande maioria odeia.

Vivemos em uma sociedade em que o avanço tecnológico e científico evolui rapidamente. Tais avanços mudam a maneira de comunicação e relacionamento entre as pessoas; e na sociedade atual a informação está disponível, sendo o mais importante saber o que fazer com tais informações. Todas essas mudanças aconteceram com o avanço da informática, pois a Álgebra é a base na programação dos *softwares* que fazem as máquinas funcionarem. Essa nova realidade necessita cada vez mais de conhecimentos matemáticos, para tanto a formação matemática dos educandos não pode ser a mesma de tempos atrás, precisa ir além da utilização de algoritmos e repetição de técnicas. Kaput (1999) justifica que “Sem alguma forma de Álgebra simbólica, não poderia haver matemática superior e nenhuma ciência quantitativa; portanto nenhuma tecnologia e vida moderna como a conhecemos”[2] (KAPUT, 1999, p. 134). Os símbolos são importantes e necessários, mas precisam fazer sentido para os alunos.

Percebe-se, então, que o principal objetivo do estudo da Álgebra no ensino fundamental é o desenvolvimento do pensamento algébrico nos estudantes. Esse pensamento, segundo Ponte *et al.* (2009), diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação. O autor se baseia no documento produzido pelo *National Concil of Teacher of Mathematics (NCTM)*. Assim, o pensamento algébrico abrange a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e inequações e funções. De acordo com esse entendimento, a utilização dos símbolos e técnicas de resolução passa a ser vista como recurso na resolução das situações-problema, mas não o objeto principal de aprendizagem. Esses autores acreditam que o pensamento algébrico é composto por três fases: representar, raciocinar e resolver problemas. O quadro a seguir resume essas fases:

Quadro 1 - Vertentes fundamentais do pensamento algébrico

[2] Without some form of symbolic algebra, there could be no higher mathematics and no quantitative science; hence no technology and modern life as we know them.

Representar	● Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; ●Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objeto verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; ●Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	●Relacionar (em particular, analisar propriedades); ●Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; ● Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	●Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Fonte: Ponte *et al.* (2009, p. 11).

Para Kaput (1999 p.134), o raciocínio algébrico, com suas diversas formas, pode ser classificado como um dos instrumentos mais importantes que a humanidade criou e grande o desafio é tornar esse conhecimento acessível a todos os alunos. O autor acredita que o pensamento algébrico compreende generalizar e comunicar essa generalidade utilizando cada vez mais a linguagem formal, iniciando na aritmética, evoluindo gradualmente até atingir raciocínios mais complexos.

Kaput (2008 p.10) propôs que o domínio da Álgebra constitui-se tanto em práticas de pensamentos individuais quanto em vertentes de conteúdo e justificou que o pensamento algébrico envolve (a) fazer e expressar generalizações em sistemas de símbolos cada vez mais formais e convencionais; e (b) raciocinar com formas simbólicas. Ele argumentou, ainda, que essas práticas ocorrem em três vertentes de conteúdo:

> 1. Álgebra como o estudo de estruturas e sistemas abstraídos de cálculos e relações, incluindo aqueles que surgem em aritmética (Álgebra como aritmética generalizada) e raciocínio quantitativo;
> 2. Álgebra como estudo de funções, relações e variação conjunta;
> 3. Álgebra como aplicação de um conjunto de linguagens de modelagem dentro e fora da matemática. (KAPUT, 2008, p. 11, tradução nossa)[3].

[3] 1. Algebra as the study of structures and systems abstracted from computations and relations, including those arising in arithmetic (algebra as generalized arithmetic) and quantitative reasoning.
2. Algebra as the study of functions, relations, and joint variation.
3. Algebra as the application of a cluster of modeling languages both inside and outside of mathematics. (KAPUT, 2008, p. 11).

Kaput (1999 p.136) expressa que a generalização e a formalização são próprias do pensamento matemático; na verdade, elas é que tornam esses pensamentos matemáticos.

Sobre generalizar, o autor entende que é a capacidade do indivíduo pensar e expor aquilo que há em comum em determinada situação. Coloca, ainda, que essas generalizações devam ser exploradas desde os primeiros anos escolares.

A modelagem coloca no centro a resolução de situações-problema, em que os conteúdos algébricos poderão ser utilizados como ferramentas, deixando de ser o objetivo principal no estudo da Álgebra.

As relações funcionais são apontadas pelos autores como uma parte importante do pensamento algébrico. Carraher e Schliemann (2002) identificam o início do raciocínio algébrico com a formulação e operações sobre relações, em especial às relações funcionais, apontando que as operações matemáticas podem ser entendidas como Funções. Este, por sinal, é o foco dessa pesquisa. Assim, no próximo item abordaremos mais detalhadamente as características do pensamento funcional.

2.2 PENSAMENTO FUNCIONAL

O pensamento funcional faz parte do pensamento algébrico, embora tenha características específicas, como diz Ribeiro e Cury (2015). O pensamento funcional pode ser interpretado com a descrição da variação de quantidade (Canavarro, 2007, p.89). O autor reforça ainda que no Pensamento Funcional a Álgebra aparece para "descrever regularidades através de símbolos ou para alterar forma das expressões que traduzem regularidades, para comparar diferentes expressões relativas à mesma regularidade ou para determinar valores particulares de uma função motivada, por exemplo, pela necessidade de previsão" (Canavarro, 2007, p.90). Cyrino e Oliveira (2011) relatam que o pensamento funcional envolve a exploração e a expressão de regularidades numéricas, como a descrição do crescimento de padrões ou generalizações referentes às somas de números consecutivos.

Para Blanton (2015), "o pensamento funcional envolve generalizar relações entre quantidades covariáveis e representar e raciocinar com essas relações por meio da linguagem natural, notação algébrica (simbólica), tabelas e gráfico" (BLANTON *et al.*, 2015, p. 43, tradução nossa.)[4]. Coiro (2022) aponta em sua pesquisa que essas diferentes representações

[4] Functional thinking involves generalizing relationships between covarying quantities and representing and reasoning with those relationships through natural language, algebraic (symbolic) notation, tables, and graph. (BLANTON *et al*., 2015, p. 43).

propiciam mais qualidade na interpretação dos aspectos covariacionais da situação funcional, ou seja, aumenta a possibilidade do aluno perceber a situação de variação entre duas variáveis.

Ponte (1990) aponta que o conceito de função é considerado um dos mais importantes em toda a matemática, sendo base para a matemática contemporânea, pois permeia vários campos direta ou indiretamente. Por exemplo, a Análise utiliza funções reais de uma ou mais variáveis, continuidade, diferenciabilidade e integração dessas funções do ponto de vista da noção de limite e do conceito de número real; o estudo de Equações Diferenciais se dedica à resolução de equações cujas incógnitas são funções; a Análise funcional trata de espaços cujos elementos são funções; e a Análise Numérica estuda o processo de controlar erros na avaliação de todos os tipos de funções, bem como a lógica utiliza funções recursivas.

Caraça (1998 p. 118) justifica que as funções surgem da necessidade de ter um instrumento para estudar a variação de quantidade e aparecem no campo matemático como instrumento próprio para o estudo das leis. Rezende *et al.* (2016) afirmam que saber que a variação de uma grandeza depende da variação de outra é um aspecto importante, mas que fica incompleto do ponto de vista epistemológico se não estudamos como acontece tal variação; é preciso dar qualidade e quantificar esse processo. Caraça (1998 p. 123) explica que em épocas passadas, quando a noção de função ainda não estava suficientemente apurada, se entendia função apenas como a de expressão analítica, que conforme Caraça (1998 p. 122) consiste em dar um conjunto de operações de modo que , por meio delas, se possa fazer corresponder a cada valor de x um valor de y. Ponte *et al.* (2009 p. 117) relatam que existem quatro principais modos de representar uma função: (i) por meio de enunciados verbais, usando a linguagem natural; (ii) graficamente, usando esquemas, diagramas, gráficos cartesianos e outros; (iii) aritmeticamente, com recurso de números, tabelas ou pares ordenados; e (iv) algebricamente, usando símbolos literais, fórmulas e correspondências e sinalizam que essas formas de representação podem ser utilizadas conjuntamente. Esses autores colocam que a variação é um dos tópicos importantes do conceito de função.

A ideia de função como uma entidade matemática individualizada e como objeto de pesquisa matemática é bastante recente. Ferreira Neto e Rezende (1998 p. 33) apontam que desde que iniciou a tomar forma, em torno do século XVIII, o conceito de função tem sido entendido sob diferentes aspectos e consideram no seu estudo três aspectos, que são: relações entre conjuntos, relações entre quantidades variáveis e transformações.

Silva e Rezende (1999, p.31) apontam que a interpretação do conceito de função como relação entre quantidades que variam foi a maneira mais usada pelos matemáticos dos séculos

XVIII e XIX que buscavam quantificar e estabelecer relações entre as grandezas envolvidas nos fenômenos naturais. Esses autores entendem que essa é uma interpretação dinâmica, pois evidencia a aplicação prática do conceito.

A interpretação do conceito de função como relação entre conjuntos segundo Silva e Rezende (1999, p.32) é mais estática e formal: é a ideia de que a cada elemento x de um conjunto A se relaciona com um único elemento f(x) do outro conjunto B.

Segundo Ferreira Neto e Rezende (1998), interpretar o conceito de função na Educação Básica sob o aspecto de transformação é justamente a maneira mais "sofisticada", pois é dessa maneira que as funções são vistas em disciplinas do Ensino Superior, como Álgebra Linear (FERREIRA NETO; REZENDE, 1998 p. 33). Apontam, ainda, que uma boa maneira para trabalhar funções sob o entendimento de transformações no Ensino Médio é utilizar uma "máquina" que transforma entradas em saídas.

O termo "função" geralmente aparece para os alunos no nono ano do Ensino Fundamental ou, como para a grande maioria, apenas no primeiro ano do Ensino Médio, quando os alunos têm entre 14 e 16 anos. Dependendo da abordagem, esse tema tão importante pode acarretar diversas dificuldades de compreensão aos alunos. Ribeiro e Cury (2015) apontam que as dificuldades na aprendizagem de função têm sido objeto de investigação de pesquisadores brasileiros e estrangeiros, sendo que os principais instrumentos de pesquisa empregados por eles enfocam o conceito de função, representação gráfica, domínio e imagem. Ponte *et al.* (2009 p.122) apontam dificuldades em fixar a terminologia específica de funções como domínio, contradomínio e imagem, gerando confusão, principalmente quando esses termos são usados em contextos puramente matemáticos; por outro lado, os autores expressam que, se usados em situações da realidade, esses termos podem parecer artificiais, sendo importante saber combinar de maneira adequada os dois contextos. Esses autores exemplificam situações em que os alunos entendem quando se fala que a "imagem de 5 é 3" mas a compreensão não é a mesma quando aparece a expressão $f(5) = 3$.

Clement (2001) traz um estudo realizado com estudantes de pré-cálculo para analisar se o entendimento desses estudantes referente ao conceito de função estava de acordo com a sua definição matemática. Pelos resultados apresentados, a autora entende que esses alunos têm uma concepção restrita do que seja uma função e aponta que uma possível causa para isso seja a maneira que os livros-texto apresentam o assunto de funções, ou ainda, que faltem momentos de discussão e aprofundamento do conceito de função nas aulas de matemática (CLEMENT, 2001).

Ferreira Neto e Rezende (1998) investigaram dois grupos de alunos universitários para verificar como esses estudantes interpretavam o conceito de função e se conseguiam construir funções a partir de situações-problema. Um dos grupos era constituído por estudantes de um curso de Engenharia do 1º semestre e o outro por alunos do curso de licenciatura em Matemática do 5º e 6º período. Após análise dos resultados, os pesquisadores perceberam que predominou a definição formal de funções que é a relação entre conjuntos, considerada por Arcavi (1987 apud FERREIRA NETO; REZENDE, 1998) como uma interpretação estática do conceito de função. Foram consideradas também dificuldades nesses alunos para determinar o domínio e contradomínio, além de problemas em distinguir ações como classificar, exemplificar e definir (ARCAVI, 1987 *apud* FERREIRA NETO; REZENDE, 1998). Outro ponto que chamou a atenção foi o fato de que os alunos de licenciatura não apontaram transformações lineares ou a ideia de funções como relação entre quantidades que variam, mesmo já tendo concluído disciplinas que priorizam essas abordagens do conceito de função. Consideram que é necessário rever a maneira de ensinar o conceito de funções, retomando o caráter dinâmico, próprio de função, fazendo relações com situações do cotidiano.

Tais dificuldades apontadas pelos alunos de licenciatura em funções também são trazidas na pesquisa de Costa (2008), quando questiona se os professores que ensinam funções na Educação Básica dominam esse assunto para ensinar com clareza e segurança. Como resultado, o autor constata que os professores participantes da pesquisa demonstraram limitações que não condizem com seu grau de formação.

Pesquisadores têm se dedicado a pesquisar os benefícios de desenvolver o pensamento algébrico e funcional nas crianças desde os primeiros anos escolares. Carraher e Schliemann (2018) entendem que existem boas razões para promover o pensamento algébrico bem antes de um curso de Álgebra. Eles examinam em seu trabalho como as operações básicas da aritmética podem ser abordadas do ponto de vista das relações funcionais de forma a facilitar a descoberta de interconexões entre tópicos padrão e promover a formulação e representação de generalizações pelos alunos desde pequenos. Esses autores informam que, nos Estados Unidos, por muito tempo, a Álgebra foi introduzida aos alunos por volta da adolescência, após estes terem atingido uma boa base de aritmética. Contudo, entendem que essa ruptura não se justifica, pois a aritmética é inerentemente algébrica.

Carraher *et al.* (2006) acredita que, ao trabalhar os conceitos gradualmente, é possível perceber a evolução do aluno. Partindo de situações simples e aumentando o nível de dificuldade, as operações algébricas vão se tornando necessárias e significativas. Pensar em uma Álgebra que seja desenvolvida ainda nos primeiros anos de escolarização é entender que, antes de abstrair conceitos complexos, é necessário que sejam criadas hipóteses e construídas generalizações. Esses autores entendem que esse trabalho deva ser aplicado juntamente com os números e operações e acreditam que a notação simbólica, as linhas numéricas, as tabelas de funções e os gráficos são ferramentas importantes que os estudantes podem fazer uso para entender e expressar as relações funcionais em uma grande variedade de contextos de situações- problemas.

Carraher e Schliemann (2018) apontam que as operações de aritmética (adição, subtração, multiplicação e divisão), bem como uma ampla gama de conceitos avançados, são vistos como funções. Uma das atividades mais básicas da matemática é pegar um objeto matemático e transformá-lo em outro, às vezes do mesmo tipo, às vezes não. “A raiz quadrada de”, transforma números em números, assim como “quatro mais”, “duas vezes”, “o cosseno de”, “o logaritmo de”. Um exemplo não numérico é: “o centro de gravidade de”, que transforma formas geométricas em pontos - o que significa que se S representa uma forma, então "o centro de gravidade de S" representa um ponto. Uma função é, grosso modo, uma transformação matemática desse tipo, segundo Gowers (2008 *apud* CARRAHER; SCHLIEMANN, 2018)[5].

Das três vertentes de conteúdos trazidas por Kaput (2008) para desenvolver o pensamento algébrico, a segunda enfoca Álgebra como estudo de funções, relações e variação conjunta. O autor pontua que essa vertente, do ponto de vista da Álgebra definida como disciplina matemática, não é estritamente Álgebra, mas análise, já que em seus níveis mais avançados leva ao cálculo e à análise.

Carraher *et al*. (2006) propõem que dar às funções um papel importante no currículo de matemática elementar ajudará a facilitar a integração da Álgebra no currículo existente e, para que isso seja possível, entendem que operações de adição, subtração, multiplicação e divisão podem ser tratadas desde o início como funções. Para Quine (1987, p. 72 *apud* CARRAHER *et al.*, 2006), "uma função é um operador ou operação".

Em comum, esses autores defendem que as funções devem ser trabalhadas de forma que contribuam para a compreensão dos conceitos e que não sejam baseadas apenas em um

[5] One of the most basic activities of mathematics is to take a mathematical object and transform it into another one, sometimes of the same kind, and sometimes not. “The square root of” transforms numbers into numbers, as do “four plus,” “two times,” “the cosine of,” and “the logarithm of.” A nonnumerical example is “the center of gravity of,” which transforms geometrical shapes…into points—meaning that if S stands for a shape, then “the center of gravity of S” stands for a point. A function is, roughly speaking, a mathematical transformation of this kind (Gowers *et al.*, 2008, p. 10).

conjunto de regras e técnicas de resolução. Seguindo esse pensamento, entendemos que um caminho para que o conceito de função possa ser desenvolvido com os estudantes é sob o aspecto de transformação via operador matemático, assunto da próxima seção.

2.3 CONCEITO DE OPERADOR

Em matemática, segundo *Encyclopedia of Mathematics* (2020), um operador é um mapeamento ou transformação que atua de um grupo para outro, em que cada um desses grupos tem uma certa estrutura que pode ser definida por operações algébricas, por uma topologia ou por uma relação de ordem. A definição de operador se funde com a definição e mapeamento ou função, ou seja, operador é a função sobre função, gerando uma nova função.

Um símbolo como +, -, x ou ÷ mostra uma operação, ou seja, indica que se deseja realizar algo com os valores gerando um novo valor. Os alunos trabalham com os operadores desde o início de sua caminhada escolar e, conforme aumenta a escolaridade, surgem novos operadores, mas o que acontece é que a nomenclatura não é utilizada pelos professores da Educação Básica.

O termo operador surge com maior ênfase no Ensino Superior, sendo empregado em disciplinas como álgebra linear, cálculo numérico, cálculo vetorial, entre outras. Conforme *Encyclopedia of Mathematics* (2020), a teoria dos operadores compõe uma ampla área da matemática, relacionada com a análise funcional linear e não linear, equações diferenciais, sendo em particular um instrumento básico na teoria dos sistemas dinâmicos, representações de grupos e álgebras bem como um instrumento matemático importante na física matemática e na mecânica quântica.

Vergnaud (2009 p. 239) aponta duas grandes categorias de relações multiplicativas: isomorfismo de medidas e produto de medidas. Segundo o autor, os problemas de produto de medidas envolvem uma relação ternária em que uma quantidade é o produto das outras duas, enquanto que o isomorfismo[6] de medidas é caracterizado por uma relação quaternária, ou seja, entre quatro quantidades, das quais duas são medidas de um determinado tipo e as outras duas de um tipo diferente. Como exemplo dessas relações: i) Porto Alegre é para o Rio Grande do Sul o que Curitiba é para o Paraná; o preço de 3 bombons está para o preço de um

[6] Em Matemática: Caráter de dois conjuntos isomorfos, com uma relação de correspondência de modo que cada elemento de um corresponde a um, somente um, elemento do outro, preservando as operações de ambos. (ISOFORMISMO 2023)

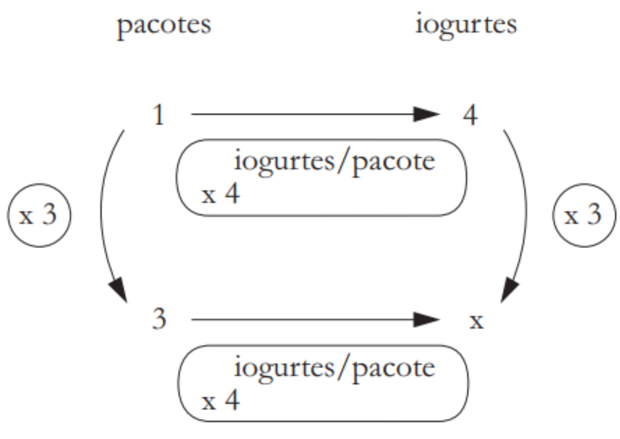
bombom assim como 3 bombons estão para um bombom, dentre outros exemplos. Na visão de Vergnaud (2009 p.239), os problemas que compõem o isomorfismo de medidas formam a base das estruturas multiplicativas.

Em problemas de proporção simples, Vergnaud (2009) mostra situações em que se evidencia o operador escalar e o operador funcional, ambos chamados por ele de invariantes operatórios que constituem o campo conceitual.

Moreira (2011, p. 67) explica que Vergnaud (2009) define conceito via três conjuntos: "o primeiro conjunto - o de situações - é o referente do conceito; o segundo - o de invariantes - é o significado do conceito; e o terceiro - o de representações simbólicas - é o seu significante". Ainda segundo Moreira (2011, p. 66), os invariantes operatórios são um conjunto de objetos, propriedades ou relações, em que repousa a operacionalidade do conceito e que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar situações.

Vergnaud (2009) exemplifica em seu estudo situações que podem ser pensadas via operadores escalar e funcional. No exemplo "Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?" (VERGNAUD, 2009, p. 239), o autor apresenta o esquema da figura abaixo para explicar as duas maneiras de pensar o problema.

Figura 2 - Diagrama de Vergnaud, aplicado o operador escalar e funcional



Fonte: Vergnaud (2009, p. 243).

Na figura 2, Vergnaud (2009, p. 243) aponta que 1 e 3 são medidas que configuram as quantidades de pacotes, enquanto 4 e x são medidas de natureza diferente, configurando quantidades de iogurtes. Desse modo, os operadores verticais (× 3) são operadores sem dimensão, chamados de escalares. Esses permitem passar de uma linha para outra na mesma categoria de medidas. Em contraponto, os operadores horizontais (× 4) caracterizam funções, pois passam de uma categoria de medida para outra, formando os operadores funcionais. O invariante operatório funcional é importante na compreensão e tratamento das funções, pois a relação é estabelecida entre dimensões diferentes.

Os operadores funcionais podem ser números inteiros ou fracionários. A seguir detalharemos melhor a fração como operador funcional.

2.3. Fração como operador

As frações podem assumir diferentes significados. Kieren (1980) apontou cinco ideias como essenciais no processo de compreensão dos números racionais, sendo elas: parte-todo, razão, quociente, medida e operador.

De acordo com Kieren (1980), o significado de parte-todo é quando algum todo é desmembrado em partes iguais; a fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes. Já a ideia de razão, mesmo relacionada à ideia parte-todo, é utilizada como comparações quantitativas de duas quantidades. Isso ocorre, por exemplo, quando se lida com situações do tipo: 3 de cada 10 jogadores são meninas.

O significado de fração como quociente está presente em situações em que se divide um inteiro por outro. Essa ideia se diferencia da ideia parte-todo, pois "dividir uma unidade em 3 partes e tomar 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 unidades em 3 partes iguais. No entanto, nos dois casos, o resultado é dado pelo mesmo número" (BRASIL, 1998, p. 102).

No significado de fração como medida, usa-se uma determinada parte como parâmetro para medir as demais. Uma situação que exemplifica esse significado pode ser medir quantos copos de água de 200 ml cabem em uma garrafa de 1 litro ou, então, analisar "se duas medidas de tintas foram feitas com a mesma razão de tinta azul para tinta branca, a cor será a mesma e as frações serão equivalentes, mesmo que a quantidade total de tinta seja diferente" (MAGINA; CAMPOS, 2008, p. 28).

Para Kieren (1980), "o subconstruto do operador retrata os números racionais como mecanismos que mapeiam um conjunto (ou região) multiplicativamente em outro conjunto. Assim, um operador "2/3" mapeia uma região para uma região semelhante de tamanho reduzido" (KIEREN, 1980, p. 139, tradução nossa)[7].

[7] The operator sub-construct portrays rational numbers as mechanisms which map a set (or region) multiplicatively onto another set. Thus a "2/3" operator maps a region onto a similar region of reduced size.

Kieren (1976) ainda pontua que a interpretação das frações como operador colabora na compreensão da multiplicação dos racionais, pois, para ele, a principal contribuição da noção de operador é a algébrica.

Com relação às estruturas cognitivas, o autor pontua três principais, associadas ao subconstruto operador:

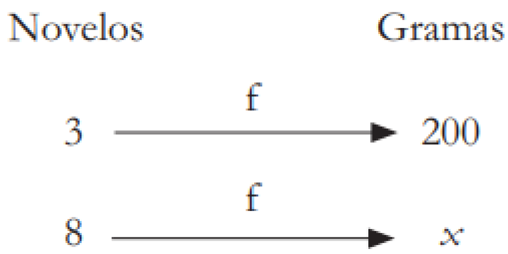
> A primeira delas é a capacidade de compor funções, isto é, de conceber o produto de duas operações como um todo, representável por alguma nova operação. A segunda é uma noção geral de reversibilidade que pode sustentar as noções abstratas de inversa e identidade. A terceira é a proporcionalidade. (KIEREN, 1976, p. 118).

Moreira (2008) entende que as frações com o significado de operador estão associadas à compreensão do número racional $\frac{p}{q}$ como uma função linear f(x) = $\frac{p}{q}x$", ou seja, a saída será igual à entrada multiplicada pelo operador $\frac{p}{q}$.

A fração com o significado de operador multiplicativo está ligada ao papel de transformação, o que em outras palavras significa dizer que é algo que incide sobre uma determinada situação e a modifica (VERGNAUD, 2009).

Em seu estudo, Vergnaud (2009) faz uma análise horizontal, referente ao operador funcional do exemplo: "3 novelos de lã pesam 200 gramas. São necessários 8 para fazer um pulôver. Qual vai ser o peso do pulôver?" (VERGNAUD, 2009, p. 240).

Figura 3 - Diagrama análise horizontal (Função) de Vergnaud



Fonte: Vergnaud (2009, p. 251).

Vergnaud (2009) entende que a análise apresentada na figura acima está focada na noção f de operador funcional, já que passa de uma categoria para outra, no caso novelos para gramas.

No diagrama, é preciso encontrar qual é o operador que leva 3 novelos a 200 gramas, ou seja, o operador é ($\times \frac{200}{3}$).

A presente pesquisa buscou abordar o conceito de função via conceito de operador.

3 ENSINO E APRENDIZAGEM: REFLEXÕES ACERCA DE UMA ABORDAGEM METODOLÓGICA

Esse capítulo traz algumas reflexões sobre a Metodologia de sala de aula referentes ao processo de ensino e aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado.

Entendemos que a sala de aula é um espaço de trabalho colaborativo, onde os alunos aprendem e evoluem na interação com seus grupos. Vigotski (2009) pontua que o desenvolvimento da criança se dá no meio onde ela interage com os demais e isso vale para todo ser humano, que se constitui a partir da sua relação com o outro ser social. O autor aponta a linguagem como fator determinante no desenvolvimento do pensamento, pois para ele “o desenvolvimento do pensamento da criança depende de seu domínio dos meios sociais do pensamento, isto é, da linguagem” (VIGOTSKI, 2009, p. 149).

Segundo o autor, quando as atividades são partilhadas entre crianças e adultos no âmbito da interação social mediadas pela linguagem geram aprendizagem.

A linguagem como instrumento das relações sociais contribui no processo de aquisição dos conceitos, conforme Ivic (2010, p. 18):

> A contribuição da aprendizagem deve-se ao fato de que ela coloca à disposição do indivíduo um instrumento poderoso: a língua. No processo de aquisição, este instrumento se torna parte integrante das estruturas psíquicas do indivíduo (evolução da linguagem interior). Mas, há algo mais: as aquisições novas (a linguagem), de origem social, entram em interação com outras funções mentais, o pensamento, por exemplo. Desse encontro, nascem as funções novas, como o pensamento verbal.

Na interação social, a atividade prática aliada à utilização da linguagem produz conhecimento, pois, conforme Vigotski (2007, p. 11):

> O momento de maior significado no curso do desenvolvimento intelectual, que dá origem às formas puramente humanas de inteligência prática e abstrata, acontece quando a fala e a atividade prática, então duas linhas completamente independentes de desenvolvimento convergem.

Moreira (2011, p. 60-61) também destaca o papel da linguagem na aprendizagem significativa[8]. Para ele, a linguagem, que pode ser verbal ou não, exerce um papel fundamental, que é a interação social e aponta que "conhecimento é linguagem", ou seja, a chave da compreensão de um conhecimento, conteúdo mesmo de uma disciplina escolar, é conhecer a sua linguagem, reforçando que "praticamente tudo o que chamamos de conhecimento é linguagem" (MOREIRA, 2011, p. 75).

Zuffi e Pacca (2002) explicam que a criação de uma linguagem própria em matemática surge para resolver problemas e situações que não podem ser explicados por fenômenos naturais, nem ser aplicadas na vida prática, e tais problemas têm origem na mente humana, muitos deles de maneira totalmente abstrata. Assim, a linguagem matemática integra todos os signos, no intuito de se fazer compreender dentro de uma determinada comunidade.

Na visão de Vigotski (2009), a formação dos conceitos não é estática e isolada, ao contrário, acontece nos processos vivos de pensamento, na solução de problemas e processo de investigação. Os signos são fatores importantes nesse processo, de acordo com Moisés (2009, p. 23). Vigotski, com sua visão Marxista, entende que o homem, por meio da utilização de instrumentos, modifica a natureza, e assim, acaba por modificar a si mesmo (VIGOTSKI, 2009). Segundo o autor, esses instrumentos, chamados de signos, podem ser a linguagem, os vários sistemas de contagem, as técnicas mnemônicas, os sistemas simbólicos algébricos, os esquemas, diagramas, mapas, desenhos e todo tipo de signos. (VIGOTSKI, 2009).

Vigotski (2009) entende que o processo de formação de conceito por meio da palavra resulta de uma atividade intensa e complexa, na qual o adolescente faz uso do signo ou palavra para dominar suas operações psicológicas a fim de resolver os problemas. Entendemos que é preciso criar situações desafiadoras ao adolescente para que ele evolua. Nesse sentido, o autor aponta que:

> Onde o meio não cria os problemas correspondentes, não apresenta novas exigências, não motiva nem estimula com novos objetivos o desenvolvimento do intelecto, o pensamento do adolescente não desenvolve todas as potencialidades que efetivamente contém, não atinge as formas superiores ou chega a elas com extremo atraso. (VIGOTSKI, 2009, p. 171).

[8] "a aprendizagem é significativa quando novos conhecimentos (conceitos, ideias, proposições, modelos, fórmulas) passam a significar algo para o aprendiz, quando ele é capaz de explicar situações com suas próprias palavras, quando é capaz de resolver problemas novos, enfim, quando compreende", conforme Moreira (2011, p. 60).

Relacionando a formação de conceitos com a aprendizagem escolar, Vigotski (2009, p. 246) pontua que "um conceito é mais do que um simples hábito mental; é um ato real e complexo do pensamento que não pode ser aprendido por meio de simples memorização". Portanto, segundo ele, o professor que segue nesse caminho "esconde o vazio", já que o aluno assimila a palavra e não o conceito.

Em se tratando de ensino e aprendizagem, Vigotski (2007 p. 97) destaca que a chamada Zona de Desenvolvimento Proximal é a distância que existe entre níveis de desenvolvimento do sujeito, que podem ser chamados de real ou potencial. A diferença entre os dois níveis está relacionada ao que o sujeito consegue solucionar de modo independente na Zona de Desenvolvimento Real e aos problemas que consegue resolver sob a orientação de um adulto ou de colegas mais capazes, chamado de Zona de Desenvolvimento Potencial.

Nesse sentido, reforçamos nossa visão de que a sala de aula é um espaço de trabalho colaborativo, que envolve a interação entre os alunos no desenvolvimento das atividades; tal interação possibilita a troca de saberes por meio da linguagem.

Slavin (1996) aponta que no grupo de trabalho cooperativo a responsabilidade individual é incentivar e encorajar uns aos outros a fazer o seu melhor, já que todo o grupo ganha. Explicar as atividades para os demais também contribui para a aprendizagem, segundo o autor:

> Estudos de comportamento dentro de grupos que mais se relacionam com ganhos de desempenho mostram consistentemente que os alunos que dão explicações uns aos outros (e menor consistente, aqueles que recebem tais explicações) são os alunos que mais aprendem na aprendizagem cooperativa. (SLAVIN, 1996, p. 54, tradução nossa)[9].

Apoiando esse pensamento, Cabral, Pais e Baldino (2019) afirmam que a Metodologia da Assimilação Solidária (SAM) sustenta o lema que se ensina quando ouve e aprende quando fala, colocando o aluno como construtor de sua própria aprendizagem, e o professor deve desenvolver as perguntas pertinentes e não dar respostas.

Os autores explicam que a SAM surgiu durante a Ditadura Militar e que "de acordo com os militares, os professores deveriam falar para toda a classe e os alunos deveriam ouvir em silêncio" (CABRAL; PAIS; BALDINO, 2019, não paginado, tradução nossa)[10]. Segundo

---

[9] Studies of behaviors within groups that relate most to achievement gains consistently show that students who give each other explanations (and less consistently, those who receive such explanations) are the students who learn the most in cooperative learning. (SLAVIN, 1996, p. 54).

[10] According to the military, teachers were supposed to speak for the entirety of the class, and the students should listen quietly. (CABRAL; PAIS; BALDINO, 2019).

os autores, nesse sistema os professores deveriam se empenhar a estimular os alunos considerados mais capazes a ultrapassar os menos capacitados; também incentivavam a aprendizagem mecânica, permitindo que os alunos ganhassem crédito sem aprender. Contrapondo esse cenário, a SAM nasceu como um caminho possível para levar a matemática para todos e essa metodologia apoia-se na psicanálise lacaniana, estabelecendo algumas regras para os alunos conseguirem créditos no trabalho em grupo. Essas regras são construídas conjuntamente com os alunos no início de cada semestre. Os alunos, por sua vez, foram separados em grupos formados por habilidades. Com essa organização, os alunos considerados mais fracos puderam se beneficiar sem prejudicar os mais fortes.

Nesse sentido, Moreira (2011, p. 50) entende que “as atividades colaborativas, presenciais ou virtuais, em pequenos grupos têm grande potencial para facilitar a aprendizagem significativa, porque viabilizam o intercâmbio, a negociação de significados, e colocam o professor na posição de mediador”.

Pichon-Rivière, médico e psicanalista, se dedicou a estudar a técnica dos grupos operativos, que segundo Bastos (2010) é a técnica que começou a ser organizada a partir de uma experiência no hospital onde trabalhava em Buenos Aires, inspirado por uma greve de enfermeiras. Para suprir a falta de pessoal de enfermagem que impossibilitaria o atendimento aos pacientes portadores de doenças mentais, “Pichon-Rivière propõe, para os pacientes menos comprometidos, uma assistência para com os mais comprometidos” (BASTOS, 2010, p. 161). Assim, de acordo com a autora, a experiência foi benéfica para os dois grupos, havendo parceria no trabalho, troca de posição de lugares e melhor integração entre eles.

De acordo com Pichon-Rivière (2009), entende-se que a técnica de grupo operativo consiste em um trabalho com grupos, centrado na tarefa, para promover aprendizagem aos envolvidos. Na visão do autor, aprender em grupo significa fazer uma leitura da realidade, ter uma atitude investigadora que possibilite novas dúvidas e novas inquietações.

Para Pichon-Rivière (2009), a mudança é o objetivo principal de todo grupo operativo, e essa mudança gera ansiedade (pelo abandono do vínculo anterior, pelo novo vínculo e pela insegurança) e envolve todo um processo gradativo em que os integrantes do grupo passam a assumir diferentes papéis e posições frente à tarefa grupal. “No grupo operativo, o esclarecimento, a comunicação, a aprendizagem e a resolução de tarefas coincidem com a cura, criando-se assim um novo esquema referencial” (PICHON-RIVIÈRE, 2009, p. 136). Em relação aos papéis desempenhados pelos integrantes, de acordo com o autor, existem alguns que são fixos, como o coordenador (que questiona e problematiza, direcionando o grupo para a tarefa comum) e o observador (que registra aquilo que ocorre na reunião para posteriormente analisar com o coordenador), enquanto que outros papéis podem se alternar conforme as necessidades e expectativas individuais ou grupais.

O autor aponta também “a aprendizagem como processo de apropriação instrumental da realidade para modificá-la” (PICHON-RIVIÈRE, 2009, p. 163). Segundo ele, a aprendizagem centrada nos processos grupais possibilita uma nova concepção de conhecimento, permitindo que os sujeitos façam questionamentos a respeito dos outros e a si mesmo. Entende, ainda, que a aprendizagem é um processo contínuo, no qual aprendemos na relação com os outros por meio da comunicação.

Nesse processo de aprendizagem vamos agregando novos conhecimentos aos já adquiridos, ocasionando, assim, aprendizagem significativa, que, de acordo com Moreira (2011, p. 14), “a aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre os conhecimentos prévios e conhecimentos novos, e que essa interação é não-literal e não arbitrária.". Segundo o autor, para possibilitar a aprendizagem significativa é necessário que o material de aprendizagem seja potencialmente significativo e que o aprendiz precisa demonstrar uma predisposição para aprender (MOREIRA, 2011, p. 14). Material potencialmente significativo, de acordo com o autor, é aquele que aluno consegue atribuir novos significados, “pois o significado está nas pessoas, não nos materiais”. (MOREIRA, 2011, p. 25). Portanto, esse material (livros, aula, aplicativos...) deve fazer ligação com o conhecimento prévio do aluno. Quanto à predisposição para aprender, o autor pontua que “o aprendiz deve querer relacionar os novos conhecimentos a seus conhecimentos prévios (MOREIRA, 2011, p. 25).

Moreira (2011 p.25) aponta que o professor precisa organizar o material de aprendizagem de tal forma que se sirva dos conhecimentos prévios (subsunçores ou ideias-âncoras) dos alunos, porém quando os alunos não possuem os subsunçores necessários para atribuir significado aos novos conhecimentos deve-se recorrer aos organizadores prévios[11].

Aprendizagem significativa não é recente, segundo Moreira (2011 p. 52) começou a ser desenvolvida na década de 1960 por Ausubel. No entanto, o autor aponta que a escola continua promovendo aprendizagem mecânica, momento em que o professor expõe, o aluno recebe o conteúdo, memoriza para as provas e logo esquece, ao entrar na universidade apresenta dificuldades em disciplinas consideradas básicas, pois lhes faltam subsunçores e

[11] “Recurso instrucional apresentado em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade em relação ao material de aprendizagem”. “Pode ser um enunciado, uma pergunta, uma situação problema uma aula que precede um conjunto de outras aulas”. (MOREIRA, 2011, p. 30).

esse processo mecânico continua na universidade, resultando em altos índices de reprovação em disciplinas como Física e Cálculo.

Essa pesquisa apresenta uma sequência didática na qual as atividades devem ser realizadas de forma colaborativa no trabalho grupal com a interação dos alunos, possibilitando a troca de conhecimentos por meio da linguagem em suas diferentes formas, desenvolvendo estratégias que propiciem a interação dos conhecimentos prévios dos alunos com os conceitos matemáticos, auxiliando o desenvolvimento do pensamento funcional nos alunos, focando no conceito de função por meio do conceito de operador (transformação). Nesse sentido, a atuação do professor exerce um papel importante nesse processo.

4 PERCURSOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

A pesquisa pretendeu responder à pergunta diretriz de como abordar o conceito de função no Ensino Fundamental por meio do conceito de operador (transformação). Essa pergunta surgiu pela percepção das dificuldades dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental referente a conceitos primordiais para o pensamento funcional, conceitos esses que são importantes para o pensamento Matemático Avançado, fundamentais para o Ensino Superior. Professores do Ensino Superior têm discutido a dificuldade dos alunos para lidar com o conceito de operador (no qual funções constituem a base), necessário nas disciplinas de Cálculo. São relatos de professores que participam do GPA - Remoto. Percebe-se que o ensino de funções, assim como dos conteúdos matemáticos em geral, continua marcado por métodos e técnicas de resolução a que muitos alunos não atribuem sentido.

Essa situação é confirmada por autores como Ponte *et. al.* (2009), Ribeiro e Cury (2015), entre outros, quando apresentam a maneira como esses conteúdos têm sido trabalhados ao longo dos anos, dando ênfase aos processos mecânicos e ao uso excessivo de letras e símbolos. Em consequência disso, é possível que muitos professores continuem ensinando da maneira como aprenderam, reproduzindo o mesmo método, contribuindo para uma abordagem com ênfase nos procedimentos e sem a essencial compreensão dos conceitos.

Com o objetivo de trazer um novo enfoque ao conceito de funções e contribuir para a aprendizagem dos alunos nesse assunto, foi decidido elaborar uma proposta de pesquisa relacionada ao conceito de funções, via conceito de operador. Assim como Minayo *et al.* (1994), acreditamos que:

> É a pesquisa que alimenta a atividade de ensino e a atualiza frente à realidade do mundo. Portanto, embora seja uma prática teórica, a pesquisa vincula pensamento e ação. Ou seja, nada pode ser intelectualmente um problema, se não tiver sido, em primeiro lugar, um problema da vida prática. As questões da investigação estão, portanto, relacionadas a interesses e circunstâncias socialmente condicionadas. São

> frutos de determinada inserção no real, nele encontrando suas razões e seus objetivos. (MINAYO *et al*., 1994, p. 17-18).

A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa em que o professor pesquisa sua própria sala de aula. Segundo Minayo (1994, p. 21), a pesquisa qualitativa atenta para “um nível de realidade que não pode ser quantificado”. Segundo o autor, na produção de conhecimentos que envolvem fenômenos humanos e sociais é mais relevante compreender e interpretar seus conteúdos do que quantificá-los.

A pesquisa-ação, de acordo com a definição de Thiollent (1986, p. 14), é:

> […] um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo.

A pesquisa-ação objetiva, de acordo com Thiollent (1986), possibilitar ao pesquisador a busca de alternativas para melhorar os problemas que encontram nas situações vividas. No caso da Educação, a pesquisa-ação aponta uma direção importante tanto para a pesquisa quanto para agir nos processos educacionais. Ainda segundo o autor, a interação entre pesquisador e participantes potencializa aprendizagens. A pesquisa-ação é praticada de forma coletiva, havendo a interação entre os pares; no caso dessa pesquisa a interação se deu entre a pesquisadora, sua orientadora, seus colegas de orientação e na disciplina do curso denominada Seminário Estruturante.

A metodologia de pesquisa adotada neste trabalho foi a Pesquisa Participante e utilizou a observação como método científico para a coleta de dados. Para Lüdke (1986, p. 26), “a observação possibilita um contato pessoal e estreito do pesquisador com o fenômeno pesquisado, o que representa uma série de vantagens”.

Quanto ao grau de participação do pesquisador na pesquisa, caracteriza-se o observador como participante. Segundo Lüdke (1986, p. 29), “o observador como participante é um papel em que a identidade do pesquisador e os objetivos do estudo são revelados ao grupo pesquisado desde o início”.

Cabe ressaltar que o presente trabalho é uma pesquisa aplicada de vertente Intervenção Diferencial, em que “cada professor realiza a intervenção dentro da margem de liberdade que tem como regente, de modo que a instituição escolar não precisa tomar conhecimento, nem opinar sobre a pesquisa que ele faz” Baldino (2001). Nessa técnica, o pesquisador observador dialoga com os alunos, direciona, abre espaço de fala e troca de ideias. Segundo Rocha

(2003, p. 72), “a intervenção evidencia que pesquisador/pesquisado, ou seja, sujeito/objeto fazem parte do mesmo processo”.

4.1 O CAMPO DA PESQUISA

A fim de responder à questão de pesquisa proposta, desenvolvemos quatro atividades, descritas ao final desse capítulo.

Essa pesquisa foi aplicada em uma turma de nono ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal de Ensino Fundamental Professora Otília Carvalho Rieth, localizada no município de São Leopoldo/RS. A turma foi organizada em grupos de quatro ou cinco alunos, visando o trabalho cooperativo e colaborativo.

4.1.1 A escola

A Escola Municipal de Ensino Fundamental Professora Otília Carvalho Rieth está localizada em um bairro próximo ao centro da cidade de São Leopoldo/RS. A escola é disposta em três prédios térreos e um prédio de dois andares. No prédio 1, temos a biblioteca, cozinha, refeitório, dois banheiros e quatro salas de aula que acomodam os alunos dos 4º e 5º anos. No prédio 2, temos a secretaria, sala da direção, sala da supervisão, cantina, sala dos professores, banheiro dos professores, laboratório de informática e duas salas de aula que acomodam os alunos dos 1º anos. No prédio 3, temos a sala do atendimento educacional especializado (AEE) e quatro salas de aula que acomodam os alunos dos 2º e 3º anos. No prédio 4, há oito salas de aula que acomodam os alunos dos 6º, 7º, 8º, 9º anos e turma do Acelera. As salas de aula dos anos finais são temáticas nas quais os alunos trocam de sala. Existe, ainda, uma sala de aula junto à pracinha que atende alunos da Educação Infantil.

A escola funciona nos períodos matutino e vespertino e conta com 1000 alunos em 2022. A escola possui 55 professores, 2 secretários, 2 cozinheiras, 6 serventes e 1 porteira.

As equipes diretivas das escolas municipais de São Leopoldo são eleitas pela comunidade escolar, devendo pertencer ao quadro efetivo da escola. A equipe diretiva da escola é composta por um diretor, um vice-diretor e duas supervisoras.

4.2 OS SUJEITOS DA PESQUISA

No ano de 2020, a população mundial foi afetada pela pandemia do Coronavírus. Devido a isso, os alunos da rede municipal de São Leopoldo retornaram às aulas em meados de agosto de forma remota através da plataforma Google Sala de Aula, sendo que muitos deles não participaram das aulas nem realizaram as atividades propostas. Ao final do ano, todos foram repactuados para a série seguinte. Em 2021, as aulas continuaram no formato remoto até o mês de agosto, quando aconteceu a retomada semipresencial. Os alunos que retornaram presencialmente foram divididos em dois grupos, em que tinham aula durante uma semana e na semana seguinte faziam atividades remotas. O grupo de alunos que decidiu não retornar permaneceu recebendo atividades remotamente. Nesse ano, todos os alunos foram repactuados novamente para a série seguinte. Em 2022, todos os alunos retornaram às aulas presencialmente. As turmas foram compostas por alunos que se encontravam em diferentes níveis de aprendizagem: alguns retornaram ao 9º sem realizar atividades nos anos de 2020 e 2021 referentes ao 7º e 8º anos.

Na escola, há três turmas de nono ano e a escolha da turma para a aplicação da pesquisa se deu pelo fato de ser a maior das três. A seguir apresentaremos um breve perfil da turma.

4.2.1 Perfil da turma

A turma escolhida é composta por 35 alunos, sendo 15 meninas e 20 meninos. Desse total, 5 alunos não realizaram atividades em 2021 referente ao 8º ano.

A seguir, temos um fragmento do diário de campo relatando a percepção da pesquisadora sobre a turma pesquisada: *"Trata-se de uma turma agitada, porém grande parte dos alunos demonstra interesse pelas atividades propostas, participando oralmente. Percebe-se defasagem na aprendizagem, mesmo nos alunos que participaram das aulas nos dois últimos anos. Quatro alunos demonstram facilidade de aprendizagem em Matemática, duas alunas mostram-se bastante empenhadas em aprender, porém demonstram ter dificuldades de aprendizagem, dois alunos mostram-se descomprometidos com as aulas. Os demais apresentam rendimento regular."*

4.3 A COLETA DE DADOS

A coleta de dados dessa pesquisa foi feita por um diário de campo, mediante às observações realizadas durante a aplicação da sequência didática, nas quais foram relatadas reações, falas, anotações e desempenho dos alunos durante a execução do trabalho. Foram registradas as reações positivas e negativas referentes ao trabalho apresentado, bem como o desempenho e o interesse dos alunos. Teve como propósito refletir a respeito da relação existente entre a teoria e a prática de ensino aplicada na sala de aula. Nessa perspectiva, foram observadas as participações dos alunos referentes à compreensão do conceito de função via conceito de operador funcional.

4.4 PRODUTO EDUCACIONAL

A elaboração de um Produto Educacional é um requisito da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) para a conclusão do Mestrado Profissional.

No decorrer do curso de Mestrado, o aluno assume o papel de professor-pesquisador, aprofunda seus conhecimentos teóricos, desenvolve estudos e arquiteta propostas de ensino para aplicar em sua sala de aula, aliando teoria e prática.

O Produto Educacional dessa dissertação é composto de cinco atividades que podem ser aplicadas e replicadas em diferentes contextos. Essas atividades foram adaptadas de outras já existentes.

As atividades "Operadores que transformam" e "Descrevendo operadores" utilizaram o construtor de funções no simulador Phet Colorado disponível em https://phet.colorado.edu/pt_BR/, tais atividades foram adaptadas de atividades existentes em https://phet.colorado.edu/es/contributions/view/4909.

A atividade "Desvendando operadores foi adaptada do jogo Mestre e adivinho (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 93-96).

A atividade "Corrida de operadores" foi adaptada do jogo Corrida de obstáculos **(**SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 85-90).

A atividade "Fração como operador" utiliza as peças do Frac-Soma 235: significantes manipuláveis, autoria de Roberto Baldino e registrado na Biblioteca Nacional, Rio de Janeiro, sob o nº 30262 em 2 de abril de 1984.

O Produto Educacional desse projeto se constitui de um material didático/instrucional no formato de uma sequência de atividades, focando o conceito de operador.

Conforme visto anteriormente, tal conceito é primordial na aprendizagem de outros conceitos relacionados ao pensamento matemático avançado no Ensino Superior.

Para tanto, o desafio é transpor um conhecimento avançado, adequando-o ao nível de conhecimento elementar.

4.4.1 Transposição Didática

Como já foi mencionado, o termo operador é bastante utilizado nas disciplinas do Ensino Superior e a compreensão desse termo por parte dos alunos nem sempre é fácil. Esse é o relato dos professores que participam dos encontros do grupo de pesquisa-ação GPA-Remoto, grupo esse que tem por objetivo discutir a sala de aula onde cada professor atua, no intuito de buscar alternativas visando a melhoria do ensino e aprendizagem.

Tomando como ponto de partida tal problemática, percebe-se a necessidade de abordar melhor o termo operador com alunos ainda no Ensino Fundamental. As crianças trabalham as operações matemáticas desde o início de sua escolarização, porém não relacionando o termo operador como sendo algo que transforma uma coisa em outra.

É preciso pensar em estratégias e atividades que proporcionem o acesso aos alunos do Ensino Fundamental conceitos que serão utilizados por eles posteriormente no Ensino Superior. A teoria da Transposição Didática é definida por Chevallard (1991, p. 45, tradução nossa) como:

> Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O 'trabalho' que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática.[12]

A teoria da transposição didática evidencia que existe uma distância entre o saber ensinado e seus saberes de referência, portanto quando se ensina algo a alguém é necessário que se faça algum tipo de adaptação. Chevallard (1991) aponta, ainda, que no processo de aprendizagem existem três polos complexos: o saber; aquele que ensina (professor); e aquele que aprende (aluno).

No produto educacional, optamos por apresentar atividades que contribuam para a compreensão de funções como transformações, via operador funcional. No próximo capítulo, apresentaremos uma análise dos dados obtidos a partir dessas atividades propostas.

---

[12] Um contenido de saber que há sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces um conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar um lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que transforma de um objeto de saber a eseñar em um objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A realização dessa pesquisa está centrada no desenvolvimento do pensamento matemático avançado nos alunos, pensamento esse que precisa ser desenvolvido nos alunos ao longo da educação básica. De acordo com Tall (2002), a característica principal do pensamento matemático avançado é o uso de definições formais e da prova. Para atingir esse pensamento, é necessário passar por um processo que inicia com o desenvolvimento do pensamento numérico, passando para o algébrico e funcional. Nesse processo, a compreensão dos conceitos por parte do aluno é fundamental, não deve ser algo mecânico e sem significado.

O processo de construção de um conceito matemático pode envolver uma ou muitas etapas diferentes. Sabendo disso, e diante das inquietações referentes às dificuldades dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental na formação do pensamento algébrico e do pensamento funcional, foram propostas cinco atividades com o objetivo de favorecer a compreensão das ideias iniciais do conceito de função sob o aspecto de transformação via operador.

Na primeira aula, apresentamos aos alunos os objetivos e a motivação para a realização dessa pesquisa. Antes de iniciar a primeira atividade, a professora pesquisadora questionou os alunos sobre os tipos de máquinas que os mesmos possuem em suas casas e o que cada uma delas faz.

A primeira atividade, denominada “Operadores que transformam", teve como objetivo compreender a ideia de transformação de determinada entrada em uma máquina, identificar a entrada, saída e o operador responsável por essa transformação, bem como descrever as mudanças ocorridas (mudanças de tamanho, forma, orientação, entre outros).

A segunda atividade, denominada “Descrevendo operadores”, objetivou descrever o operador responsável pelas transformações de um grupo de entradas, para determinar a saída; prever saídas de um determinado operador, usando uma determinada entrada e construir operadores para criar uma nova função. Essa atividade foi composta de três tarefas: utilizando a tela numérica, a tela equação e a tela misteriosa.

A terceira atividade, denominada “Desvendando operadores”, teve como objetivo estabelecer relações entre a linguagem em prosa e a linguagem algébrica simbólica, bem como perceber as operações algébricas como operadores funcionais.

A quarta atividade, denominada “Corrida de operadores”, teve como objetivo compreender as operações algébricas como operadores.

A quinta atividade, denominada “Fração como operador”, teve como objetivo compreender as frações como operador multiplicativo.

A sequência das atividades objetivou desenvolver a aprendizagem do conceito de função, focando o conceito de operador funcional. Para que ocorra aprendizagem significativa, Zabala (2014) aponta que as atividades precisam relacionar os conhecimentos já estruturados no aluno e aquilo lhe foi ensinado.

Zabala (2014) atenta que o ensino deve atender à diversidade dos estudantes, contemplando os diferentes tipos de aprendizagens que são por ele classificadas em factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais. A aprendizagem factual, segundo o autor, está relacionada à memória, aos conhecimentos dos fatos em si. Nessa sequência, espera-se que os alunos compreendam os símbolos da função e sua representação.

A aprendizagem conceitual, conforme Zabala (2014), é aquela em que o aluno constrói o conceito e este passa a ter significado; para tanto, a compreensão é fundamental. Na sequência proposta, espera-se que o aluno compreenda o conceito de função como algo que opera transformando uma entrada em uma saída.

Zabala (2014) sinaliza a aprendizagem procedimental como aquela relacionada a um conjunto de ações para atingir um objetivo. Nesse sentido, na sequência aqui proposta esperou dos alunos: representar funções, escrever a lei de formação (operador), traduzir linguagem verbal para linguagem algébrica, determinar o conjunto imagem, resolver situações problemas, discutir com o grupo. Sobre a aprendizagem atitudinal, Zabala (2014) aponta os valores, atitudes e normas, diferentes entre si, mas que em determinadas situações tem aproximação específica. As atividades propostas para sequência envolveram trabalho grupal, portanto espera-se que os alunos expressem valores como respeito aos outros, responsabilidade, que tenham atitudes de cooperação com o grupo, participem das atividades propostas e que sigam as normas estabelecidas pelo coletivo.

A seguir, apresentamos a análise dos dados obtidos por meio das intervenções realizadas.

5.1 ATIVIDADE: OPERADORES QUE TRANSFORMAM

Essa atividade foi aplicada no dia 8/6/2022 e teve como objetivo compreender a ideia de transformação de determinada entrada em uma máquina, identificar a entrada, saída e o operador responsável por essa transformação, bem como descrever as mudanças ocorridas (mudanças de tamanho, forma, orientação etc.).

A atividade foi realizada utilizando o construtor de funções no simulador Phet Colorado[13]. Cada grupo tinha disponível um computador Chromebook e na sala de aula também havia tela interativa.

Inicialmente, a professora explicou aos alunos que eles fariam algumas atividades usando o simulador de uma máquina e perguntou sobre os tipos de máquinas que os mesmos possuíam em suas casas. Surgiram respostas tais como: máquina de lavar roupa, liquidificador, torradeira, cafeteira, entre outras.

Na sequência, foram realizados os questionamentos que seguem abaixo, extraídos do caderno de campo, com as respectivas respostas dos alunos:

Professora: O que cada máquina faz?

Alunos: *"A cafeteira faz café"; "A máquina de lavar lava as roupas sujas";"A torradeira esquenta o pão";" O liquidificador tritura os alimentos"; "Cada máquina tem uma função"; "Cada máquina foi programada para fazer uma coisa".*

Professora: O que entra na cafeteira?

Alunos: *"Água e pó de café".*

Professora: E o que sai?

Alunos: *"A bebida café".*

Professora: A cafeteira foi programada para fazer o quê?

Alunos: *"Primeiro ela esquenta a água e depois a água quente sobe pelo caninho, cai no pó de café e desce a bebida pronta"*.

Professora: O que entra na torradeira?

Alunos: *"O pão com o recheio frios".*

Professora: E o que sai?

Alunos: "*O pão quente".*

Professora: Então, a torradeira foi programada para fazer o quê?

Alunos: *"Ela esquenta a chapa"*.

Diante desses questionamentos, um aluno comenta:

Alunos: *"Tem máquina que tem só uma função e outras tem mais de uma função.*

No comentário desse aluno, foi possível perceber que, mesmo sem falar anteriormente no assunto "funções", alguns alunos expressaram a palavra função como a programação responsável pela transformação das entradas.

[13] Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/function-builder. Acesso em: 10 nov. 2022.

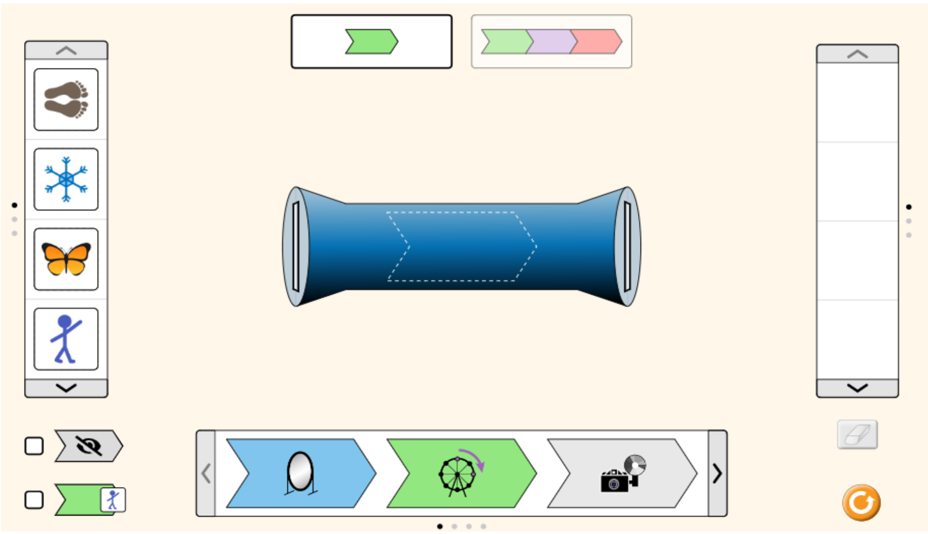
Diante das respostas, nota-se que intuitivamente os alunos associaram as máquinas às funções e transformações. Neto e Rezende (1998) apontam que interpretar o conceito de função sob o aspecto de transformação é justamente a forma mais "sofisticada", pois é dessa maneira que as funções são vistas em disciplinas do Ensino Superior.

Iniciar a atividade com essa abordagem foi interessante, pois os alunos relataram algo que ocorre no seu cotidiano. Moreira (2011) entende que a aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre os conhecimentos prévios e conhecimentos novos.

A professora combinou com os alunos de dar o nome de "operador" para a programação responsável em modificar a entrada.

Cada grupo recebeu uma folha com as questões propostas e um Chromebook para acessar o simulador Phet Colorado na tela "padrões". As respostas dadas foram construídas pelos integrantes do grupo. Nessa atividade, os grupos foram numerados de 1 a 9.

Figura 4 - Simulador Phet Colorado - tela padrões



Fonte: Phet Colorado[14].

Questão 1- Explore o simulador e construa algumas transformações que escolher. Anote de uma a três observações sobre as transformações realizadas. Segue abaixo as respostas dadas pelos grupos.

Grupo 4: *"O boneco entrou foi operado e saiu 90˚para direita". "A borboleta entrou, sofreu a operação e a cor amarela ficou azul". "O pé entrou foi operado e ficou menor"*

[14] Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/html/function-builder/latest/function-builder_pt_BR.html. Acesso em: 10 nov. 2022.

Grupo 5: *"Podemos observar que tem várias opções com diferentes funções, algumas podem ser transformadas e depois devolvidas, já outras não".*

Grupo 3: *"Espelho: inverte o lado". "Roda gigante: 90°". "Fotografia: fica tudo preto e branco".*

Grupo 7: *"A borracha apaga as imagens". "A câmera tira fotos em preto e branco". "A roda deita as imagens".*

Grupo 2: *"Câmera, borracha e encolher resultado= NADA".*

Grupo 9: *"As transformações fazem as imagens terem efeitos diferentes".*

Grupo 8: *"Colocamos o arco íris junto com o diminuidor, deixando o homem amarelo e pequeno".*

Grupo 6: *"? B = virou o objeto em 90°, aceita retorno". Câmera = torna o objeto sem cor, não aceita retorno". Borracha = apaga o objeto, não aceita retorno".*

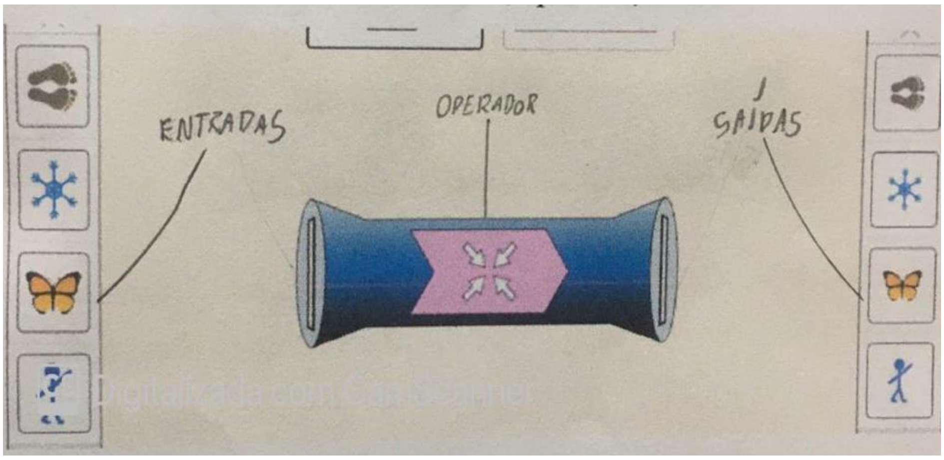
Grupo 1: *"O espelho inverte o lado do objeto". "A roda gigante vira o objeto em 90°". "A câmera fica na mesma posição, mas muda a cor".*

Entendemos que a observação é uma parte importante do processo de aquisição de um conceito. Por meio dela, os alunos perceberam que o operador atuava nas entradas, modificando-as.

Powell e Bairral (2014 p. 30) apontam que a escrita é um instrumento importante de reflexão sobre o pensamento, pois por meio dela os alunos têm a oportunidade de analisar seu processo de pensamento, os significados construídos e as formas de raciocínio matemático presentes.

Questão 2 - Rotule as partes desta transformação: entrada, saída e operador;

Figura 5 - Registro da questão 2 - Operadores que transformam



Fonte: imagem da autora.

Questão 3 - Faça uma captura de tela de cada imagem depois de passar pelo operador e registre na tabela. Descreva o que acontece com as imagens depois que elas passam pelo operador. Nomeie o operador.

Figura 6 - Registro da questão 3 - Operadores que transformam

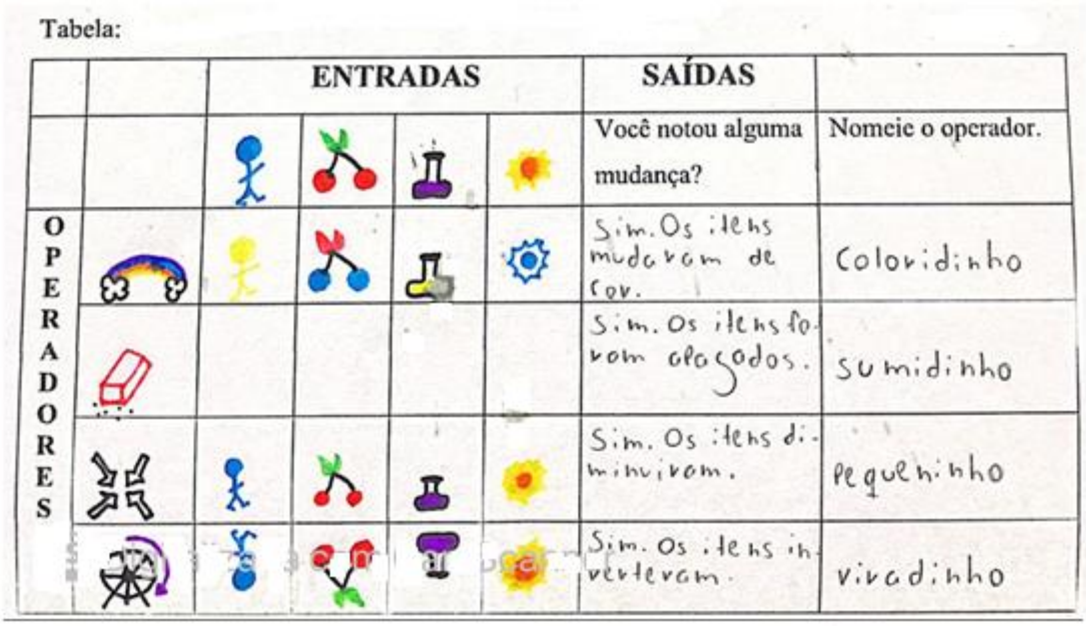


Tabela:

		ENTRADAS				SAÍDAS	
						Você notou alguma mudança?	Nomeie o operador.
OPERADORES						Sim. Os itens mudaram de cor.	Coloridinho
						Sim. Os itens foram apagados.	sumidinho
						Sim. Os itens diminuiram.	pequeninho
						Sim. Os itens inverteram.	viradinho

Fonte: imagem da autora.

Na sequência, os grupos deveriam fazer alguns registros escritos a respeito da atividade, conforme descrito na questão abaixo.

Questão 4 - Com suas próprias palavras, com base em suas observações da tabela, escreva o que você compreendeu referente à função do operador (na sua explicação tente usar as palavras entrada, saída, operador, relacionado/relacionamento). Segue abaixo os registros dos grupos:

Grupo 5: *"As entradas passam pelo operador de uma forma e a saída sai de outra. O jeito que ela vai sair depende do operador escolhido".*

Grupo 1: *"Transformar está relacionado a mudar".*

Grupo 6: *"O operador sempre mudará o objeto de entrada, deixando-o diferente na saída, e a diferença é sempre relacionada à figura do operador".*

Grupo 3: *"Por base, o objeto ou a matéria entra de um jeito no operador e sai de outra, mudando seu aspecto físico".*

Grupo 7: *"Nós compreendemos que a função dos operadores é fazer alguma mudança. O relacionamento entre o operador, entrada e saída é que as figuras entram de uma forma e saem de outra".*

Grupo 2: *"Com a entrada do item, o operador modifica o item e faz dele um item totalmente diferente ou o item fica igual dependendo do operador".*

Grupo 9: *"Ele faz com que as figuras mudem conforme trocamos as transformações, fazendo elas entrarem pela entrada e saírem pela saída com outras formas".*

Grupo 8: *"O operador executa uma ação e seu resultado se transforma".*

Grupo 4: *"O operador faz a transformação dos objetos, exercendo sua função única que pode ser virar 90°, 180°, ficar preto e branco ou virar ao contrário após ser feita a transformação".*

Questão 5 - Com base na sua definição, crie uma previsão do que acontecerá se você passar a borboleta pelos seguintes operadores:

Figura 7 - Questão 5 - Operadores que transformam.

Fonte: Phet Colorado[15].

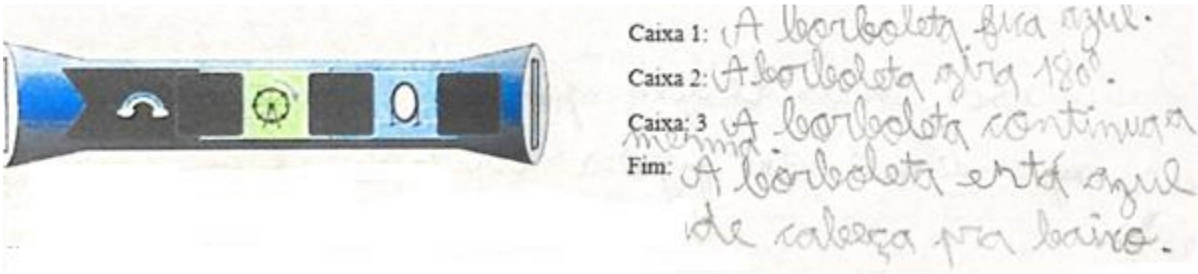
Previsão: *"Vai mudar de cor, vai girar 90 graus e vai ficar espelhada".*

Na questão 5, foi possível constatar que todos os grupos fizeram a mesma previsão.

[15] Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/html/function-builder/latest/function-builder_pt_BR.html. Acesso em: 10 nov. 2022.

Na sequência, eles testaram no simulador e puderam verificar se a previsão estava correta.

Figura 8 - Registro da questão 5 - Operadores que transformam.



Fonte: imagem da autora.

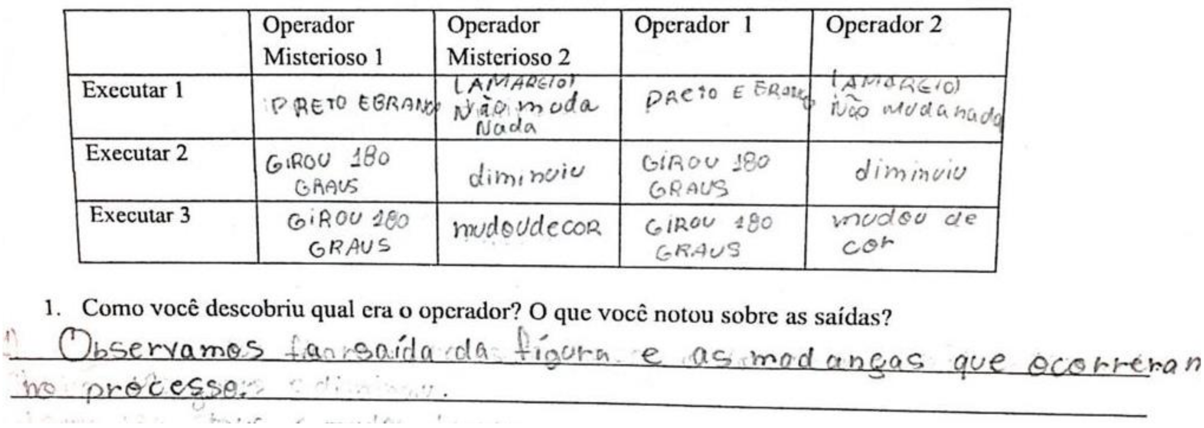
Nos registros das questões 4 e 5 ficou claro que, para os alunos, o operador altera as entradas de alguma maneira, e isso pode ser verificado na saída.

Dreyfus (2002) entende que o processo de aquisição de um conceito parte da ação do aluno quando ele constrói propriedades dos conceitos por meio das deduções de definições. Moreira (2011, p.79) aponta que “definições são instrumentos para pensar e só fazem sentido dentro do contexto para o qual foram inventadas”.

Questão 6 - Clique na guia "Mistério" na parte inferior da página.

1. Clique na opção de dois operadores na parte inferior da página.
2. Coloque pelo menos três entradas nos operadores misteriosos e descubra quais são as saídas.
3. Grave sua resposta.
4. Confira sua resposta clicando no botão do olho abaixo dos operadores e registre.

Figura 9 - Registro da questão 6 - Operadores que transformam.



	Operador Misterioso 1	Operador Misterioso 2	Operador 1	Operador 2
Executar 1	PRETO E BRANCO	(AMARELO) Não muda Nada	PRETO E BRANCO	(AMARELO) Não muda nada
Executar 2	GIROU 180 GRAUS	diminuiu	GIROU 180 GRAUS	diminuiu
Executar 3	GIROU 180 GRAUS	mudou de cor	GIROU 180 GRAUS	mudou de cor

1. Como você descobriu qual era o operador? O que você notou sobre as saídas?

Observamos a saída da figura e as modanças que ocorreran no processo.

Fonte: imagem da autora.

Na sequência, os grupos registraram suas conclusões gerais referentes à atividade realizada:

1. O que acontece quando você escolhe um operador e depois passa uma figura pelo tubo?

"Ele pode mudar de cor, forma e se multiplicar". "A figura se transforma de acordo com a função do operador. "Ela sofre a transformação na qual o operador muda". "Ela sairá de forma diferente do início". "O operador muda a imagem".

2. O que acontece quando você tira uma foto do lado direito e a devolve pelo tubo? Existem transformações que você não consegue reverter?

"A borracha, a câmera e o multiplicador não voltam". "A figura retorna ao seu estado original, existem operadores cujas funções são irreversíveis como a borracha, a câmera e a lata". "Ela volta a ser como era antes". "Existem algumas. A câmera é um exemplo disso". "Elas voltam ao normal, mas algumas são irreversíveis".

3. Ao usar mais de um operador, a ordem importa?

"Sim, depende do lugar que o operador está". "Sim, depende da figura ela pode sofrer leves alterações". "Importa muito pelo fato que se a ordem for alterada, o resultado final pode ser alterado". "Alterar a ordem não modifica a saída". "Sim, porque ordens diferentes dão resultados diferentes".

Retomando o objetivo da atividade, foi possível perceber que os grupos relacionaram as máquinas com transformações e que essas transformações aconteceram devido à ação do operador envolvido, ou seja, compreenderam o operador como transformação que atua de um grupo para outro.

Em conversa no grande grupo, a professora pergunta a opinião dos alunos sobre a atividade ser realizada em grupo. Os alunos reagiram positivamente à realização da atividade e com relação ao trabalho grupal, houve os seguintes relatos:

"Precisa pensar"; "Precisa saber ouvir a opinião dos outros"; "Foi interessante fazer a atividade com um colega que nunca havia conversado antes"; "O grupo deixa em dúvida, cada um tem uma opinião".

Nos relatos descritos acima, foi possível perceber que o trabalho grupal pode ser encarado pelos alunos como algo desafiador. Segundo (PICHON-RIVIÈRE, 2009, p. 137), "no grupo operativo, o esclarecimento, a comunicação, a aprendizagem e a resolução de tarefas coincidem com a cura, criando-se assim um novo esquema referencial". De acordo com Pichon, a aprendizagem centrada nos processos grupais possibilita uma nova concepção de conhecimento, permitindo que os sujeitos façam questionamentos a respeito dos outros e a si mesmos. Entende que a aprendizagem é um processo contínuo, no qual aprendemos na relação com os outros por meio da comunicação.

Ao final da atividade, houve ainda o seguinte relato de um aluno:

"Profe, agora eu entendi a relação dessa atividade com a matemática, primeiro achei que não tinha nada a ver, porque só tinha as figuras, mas os operadores também podem ser os sinais de mais, menos, vezes e dividido".

Entendemos que o relato desse aluno teve um significado muito importante em nossa pesquisa. Quando o aluno compreende que os sinais operatórios constituem operadores, responsáveis em transformar, acreditamos ter atingido grande parte do nosso objetivo, pois segundo *Encyclopedia of Mathematics* (2020) um operador é um mapeamento ou transformação que atua de um grupo para outro, portanto os sinais operatórios de adição, subtração, multiplicação e divisão configuram os operadores que os alunos têm trabalhado desde o início da escolarização.

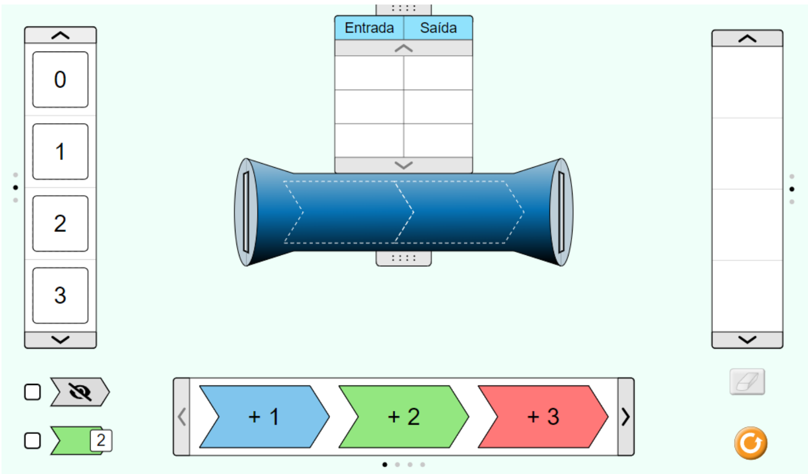
5.2 ATIVIDADE: DESCREVENDO OPERADORES

Assim como a primeira atividade, essa foi realizada utilizando o construtor de funções no simulador Phet Colorado. A atividade teve como objetivo descrever o operador responsável pelas transformações de um grupo de entradas, para determinar a saída; prever saídas de um determinado operador, usando uma determinada entrada e construir operadores para criar uma nova função. Essa atividade foi composta de três tarefas: utilizando a tela numérica, a tela equação e a tela misteriosa. Essa atividade foi aplicada nos dias 14, 21 e 28 de junho de 2022.

5.2.1 Atividade: Descrevendo operadores - Tela Numérica

Utilizando a tela interativa disponível na sala de aula, foi acessado o simulador Phet colorado na tela numérica, relembrando com os alunos aquilo que foi realizado na atividade da aula anterior. A professora apresentou o funcionamento da máquina e os alunos apontaram as semelhanças assim como as diferenças entre o simulador básico e a tela numérica.

Figura 10 - Tela numérica do simulador Phet Colorado



Fonte: Phet Colorado[16].

Quanto às semelhanças e diferenças entre as duas telas, os alunos relataram:

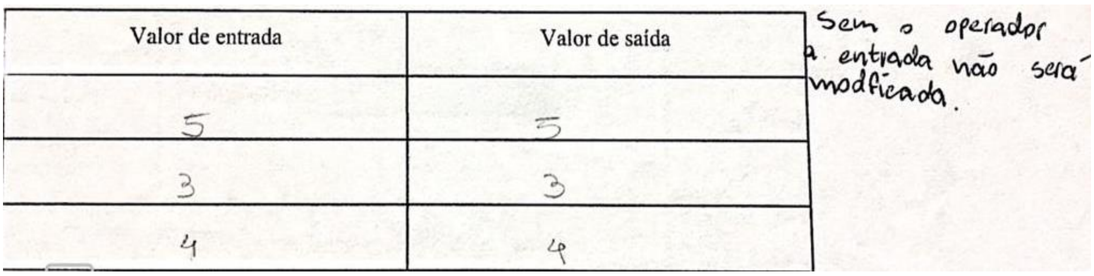
"As entradas agora são números"; "Os operadores são as operações matemáticas".

A professora mostrou no simulador que as entradas e saídas poderiam ser visualizadas em uma tabela.

Os grupos acessaram o simulador nos Chromebooks disponibilizados e iniciaram as atividades propostas.

Questão 1. Sem inserir "operadores", arraste alguns valores de entrada e solte na máquina. Descreva os resultados para cada tentativa, comparando os números inseridos na máquina com os números de saída.

Figura 11 - Registro da questão 1- Tela Numérica.



Valor de entrada	Valor de saída
5	5
3	3
4	4

Sem o operador a entrada não será modficada.

Fonte: imagem da autora.

Todos os grupos responderam com tranquilidade essa questão, entendendo que sem operador a entrada não se altera.

16 Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/html/function-builder/latest/function-builder_pt_BR.html. Acesso em: 10 nov. 2022.

Questão 2. Usando os "operadores", selecione uma opção e solte-a na máquina. Arraste alguns números dos valores da entrada para a máquina. Registre os valores na tabela para cada tentativa e compare os valores da entrada com os da saída.

Figura 12 - Registro da questão 2 - Tela Numérica.

Valor de entrada	Operador	Valor de saída
1	-2	-1
2	-2	0
3	-2	1

A entrada foi subtraída por 2 fazendo a saída ficar 2 unidades a menos que a entrada

Fonte: imagem da autora.

Questão 3 - Repita o processo selecionando as diferentes operações disponíveis.

Questão 4- Selecione uma opção de operador com duas operações. Arraste alguns números dos valores da entrada para a máquina. Registre os valores na tabela para cada tentativa e compare os valores da entrada com os da saída.

Figura 13 - Registro da questão 4 - Tela Numérica.

Valor de entrada	Operador	Valor de saída
7	+3 x2	20
6	+3x2	18
3	+3 x2	12

Qual é a função da sua máquina? Como você sabe?

A função da nossa máquina é pegar o valor de entrada, adicionar 3 e multiplicar por 2, assim temos o valor de saída.

Fonte: imagem da autora.

Segundo Vergnaud (2009 p. 243), os operadores horizontais caracterizam funções, pois passam de uma categoria de medida para outra, sendo os operadores funcionais. A compreensão desse invariante é essencial na compreensão e tratamento de funções.

Alguns grupos demonstraram dificuldades em expressar o pensamento de maneira escrita. Nesse sentido, é papel do professor intervir com questionamentos que proporcionem aos alunos reformular as frases.

Professora: Subtrair e adicionar o que?

"Subtrair 1 e adicionar 3".

Professora: A quem?

"Ao valor da entrada".

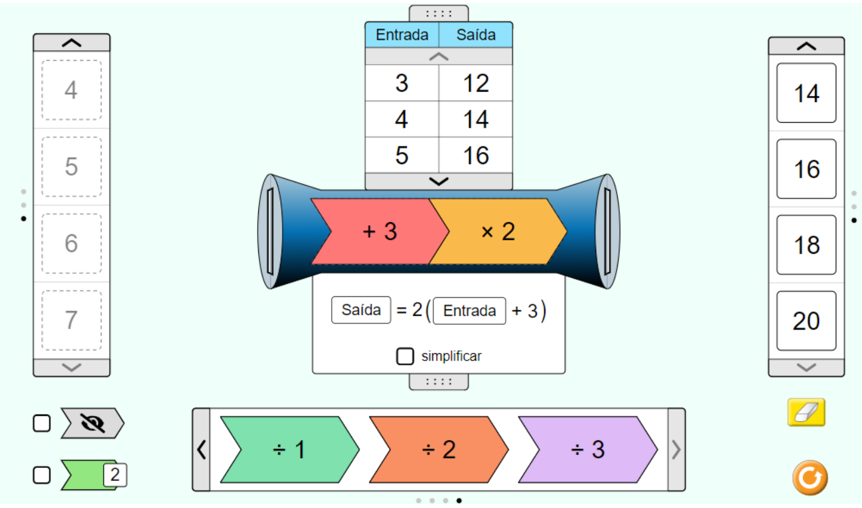
Professora: Será que você poderia dizer de maneira mais simples, subtrair 1 e adicionar 3, ou seja, subtrair 1 e adicionar 3, é o mesmo quê?

"Somar 2".

Powell e Bairral (2014, p. 30) apontam a escrita como um instrumento importante de reflexão sobre o pensamento, pois por meio dela os alunos têm a oportunidade de analisar seu processo de pensamento, os significados construídos e as formas de raciocínio matemático presentes.

Ao final da atividade, a professora acessou novamente o simulador na tela interativa, inseriu alguns operadores e entradas sugeridos pelos alunos e solicitou que eles observassem a maneira como o simulador representava a operação realizada pela máquina:

Figura 14 - Simulador Phet Colorado- tela numérica



Fonte: Phet Colorado[17].

[17] Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/html/function-builder/latest/function-builder_pt_BR.html. Acesso em: 10 nov. 2022.

Quando questionados sobre a função da máquina acima, os alunos disseram que “a máquina somou três ao valor de entrada e depois multiplicou o resultado por dois”. A professora perguntou, então, como poderiam ler a operação indicada pelo simulador.

Quase que de maneira unânime, os alunos leram:

“A saída é igual à entrada mais três e o resultado multiplicado por dois”.

A professora também questionou sobre a existência dos parênteses e um aluno respondeu que “os parênteses servem para mostrar que é o resultado”.

A professora sugeriu aos alunos que eles poderiam usar as palavras “entrada” e "saída" para melhor expressar a função da máquina.

5.2.2 Atividade: Descrevendo operadores - Tela Equação

Utilizando a tela interativa disponível na sala de aula, foi acessado o simulador Phet Colorado na tela equações, relembrando com os alunos aquilo que foi realizado na atividade da aula anterior. Fomos levantando semelhanças e diferenças entre o simulador básico e a tela numérica e a tela equações.

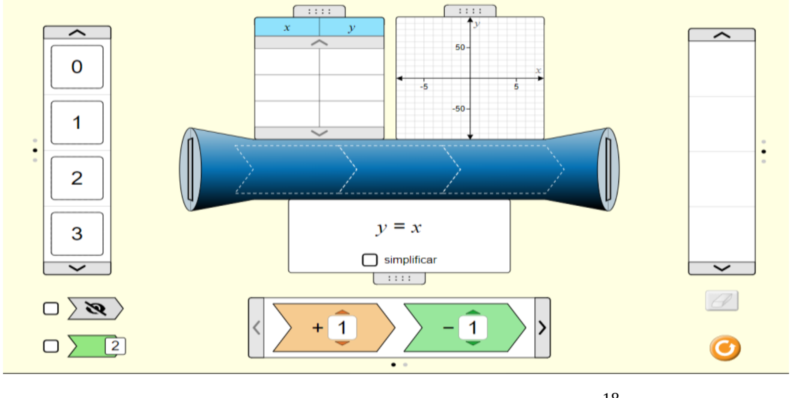
Professora: O que está diferente na tabela?

“As entradas são x e as saídas são y”.

Professora: Além da tabela, como os valores de entradas e saídas podem ser visualizados?

Demorou um pouquinho até que alguém disse se tratar de um gráfico.

Figura 15 - Simulador Phet Colorado- tela equações



Fonte: Phet Colorado[18].

[18] Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/html/function-builder/latest/function-builder_pt_BR.html. Acesso em: 10 nov. 2022.

Questão 1 - Arraste e solte seus valores de entrada na máquina. Registre na tabela. Compare os números de entrada e saída para determinar qual é a função da sua máquina.

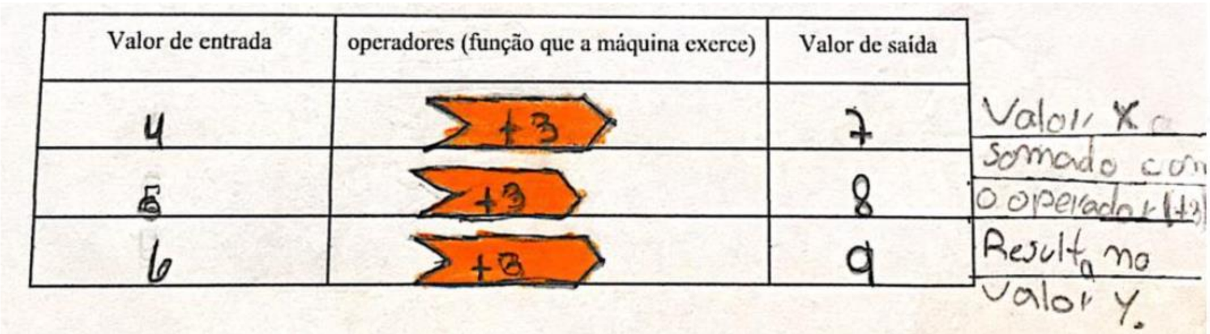
Como o termo “função” já estava sendo utilizado pelos alunos, a professora adicionou esse termo aos operadores na atividade.

Questão 2 - Crie uma regra para descrever a função que a sua máquina exerce. Explique por que você escolheu isso, com evidências para apoiar sua afirmação.

Regra:

Explicação:

Figura 16 - Registro da questão 1 - Descrevendo operadores



Valor de entrada	operadores (função que a máquina exerce)	Valor de saída
4	+3	7
5	+3	8
6	+3	9

Valor x somado com o operador (+3) Resultado no valor y.

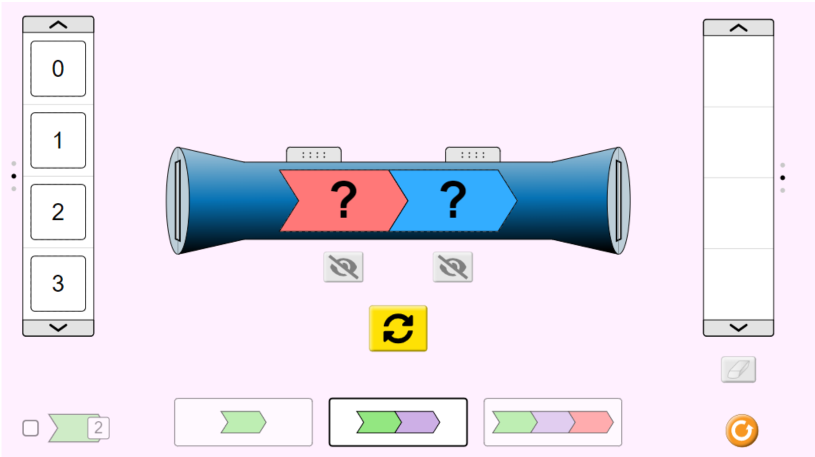
Fonte: imagem da autora.

Nota-se que o grupo da imagem acima utilizou “x” e “y” como símbolos para representar a entrada e saída, mesmo não sendo solicitado. Percebe-se que esse grupo conseguiu generalizar a situação. Kaput (1999) expressa que a generalização e a formalização são próprias do pensamento matemático; na verdade, elas são que tornam esses pensamentos matemáticos.

5.2.3 Atividade: Descrevendo operadores - Tela Misteriosa

O simulador foi acessado na tela interativa e cada grupo acessou no Chromebook disponibilizado. Todos foram orientados a acessar o simulador na tela mistério.

Figura 17 - Simulador Phet Colorado - tela misteriosa



Fonte: Phet Colorado[19].

Questão 1 - Vocês devem determinar a função oculta, por meio da análise dos resultados obtidos. Como auxílio, vocês podem utilizar a tela de Equações como recurso, construindo equações, testando e modificando até determinar os operadores que correspondem a função misteriosa.

Questão 2 - Tomem nota das suas estratégias utilizadas para obter o resultado.

Para a realização da questão foram feitos alguns combinados previamente:

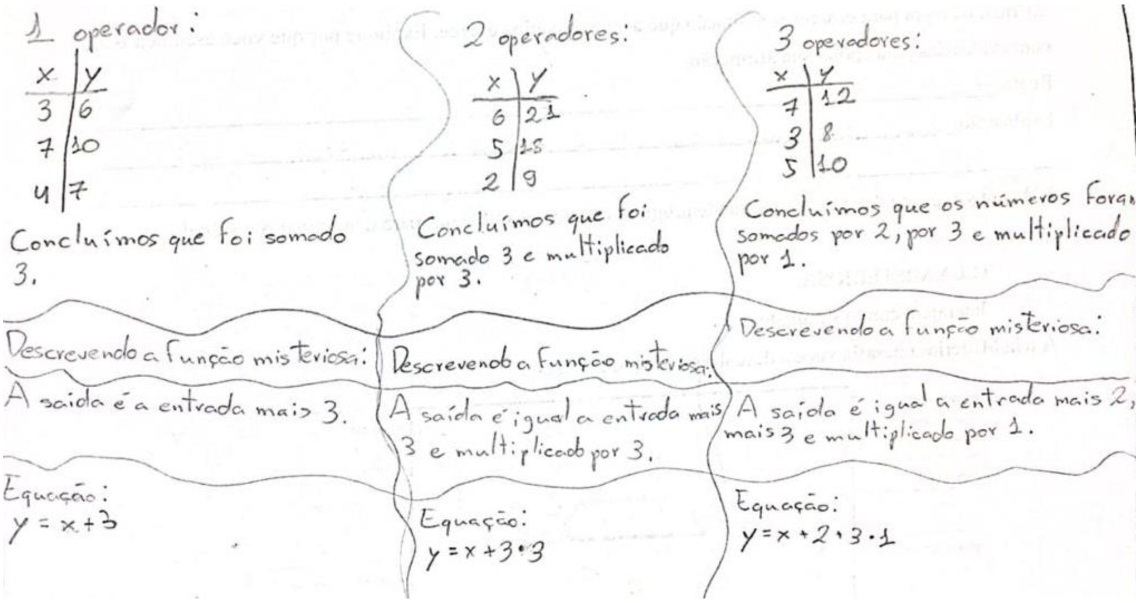
1. A atividade seria realizada com um, dois e três operadores.

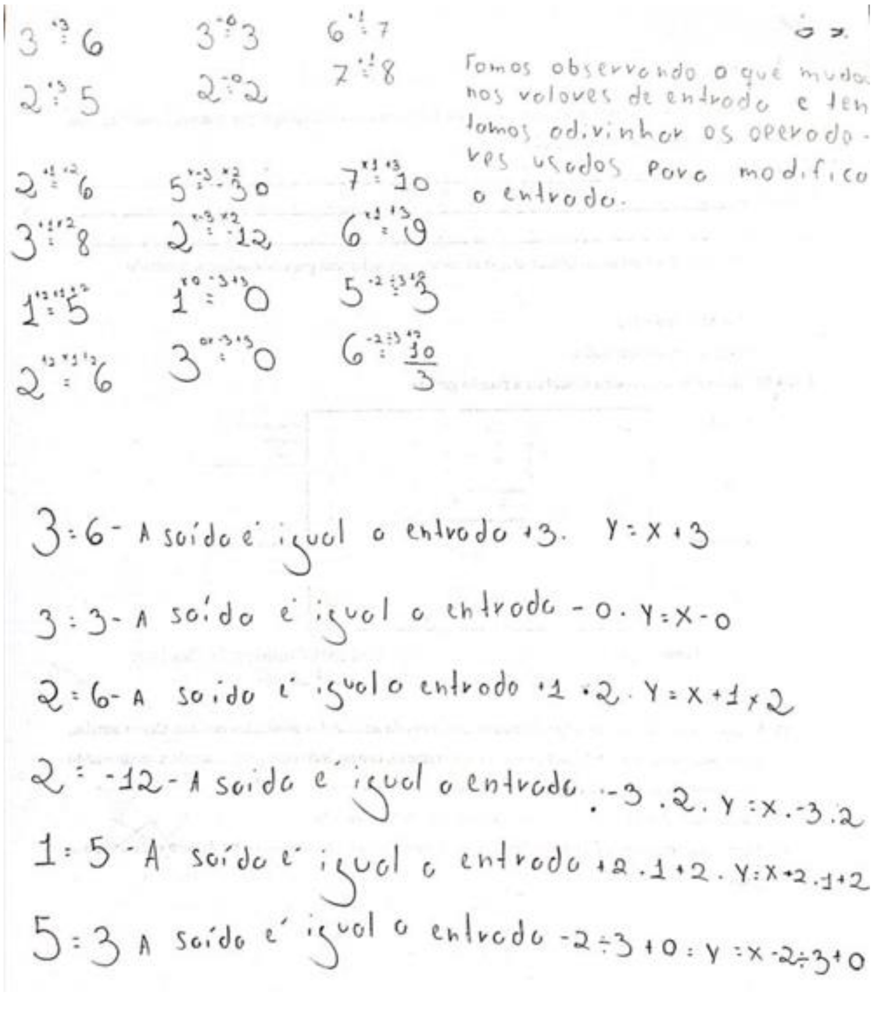
2. Eles poderiam substituir as palavras entrada e saída por x e y como apresentado no simulador ou outros símbolos quaisquer para representar a entrada e saída.

3. Os grupos deveriam formular a frase que descrevesse a função misteriosa, utilizando as palavras entrada e saída, e, após, representar a frase com uma equação.

[19] Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/html/function-builder/latest/function-builder_pt_BR.html. Acesso em: 10 nov. 2022.

Figura 18 - Registro da questão 1 e 2 - Descrevendo operadores - tela misteriosa

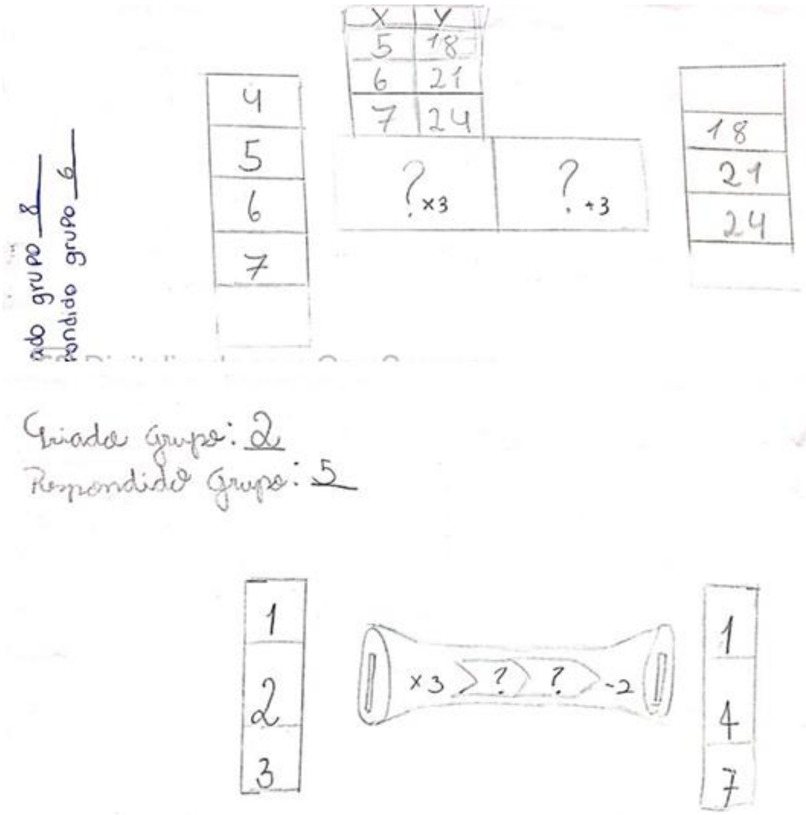




Fonte: imagem da autora.

Questão 3 - Agora, seu grupo deverá elaborar uma situação, com operadores ocultos, como desafio para os outros grupos.

Figura 19 - Registro da questão 3 - Descrevendo operadores - tela misteriosa



Fonte: imagem da autora.

O processo de transpor a linguagem escrita para a linguagem matemática foi compreendido mais facilmente por alguns alunos e de maneira mais lenta por outros, mas todos os grupos conseguiram generalizar as situações. Vigotski (2009) aponta que a matemática tem a sua linguagem própria, formada por uma gama de signos e conhecer essa linguagem é fundamental para se comunicar matematicamente. Essa comunicação pressupõe generalizar.

5.3 ATIVIDADE: DESVENDANDO OPERADORES

Essa atividade se consistiu de um jogo e foi aplicada no dia 13/7/2022. Teve como objetivo estabelecer relações entre a linguagem em prosa e a linguagem algébrica simbólica, bem como perceber as operações algébricas como operadores.

Os alunos formaram grupos de quatro integrantes, os jogos foram distribuídos aos grupos com as seguintes regras:

1. Decide-se quem começa. As frases são embaralhadas e cada jogador recebe uma frase, que deverá ser descoberta pelos demais jogadores do grupo.

2. Em cada rodada, um dos participantes será o *Mestre*. Cada jogador do grupo fala um número e o jogador com a frase, chamado de *Mestre*, deve operar com esse número o que a frase indicar. A descoberta se fará por meio da análise das respostas dadas por quem tem a frase nas mãos, ou seja, o *Mestre*.

3. Se nenhum dos jogadores descobrir a frase, depois de cada um ter dito um número, os jogadores podem dizer mais um número para o *Mestre.*

4. As frases são usadas apenas em uma jogada, ou seja, depois que o jogador descobriu a frase, ela não será devolvida ao monte.

5. Os números ditos e a frase devem ser anotados na folha de registro por todos os participantes do jogo.

6. Em cada jogada, ganha um ponto o jogador que primeiro descobrir a frase e escrever a expressão correspondente.

7. Ganha o jogo o jogador que tiver mais pontos.

Os alunos mostraram interesse pela atividade proposta. Antes de iniciar, a professora solicitou que cada grupo fizesse a leitura das frases. Vários alunos levantaram dificuldades de compreensão de algumas palavras nas frases como:

O oposto de um número; O quadrado de um número.

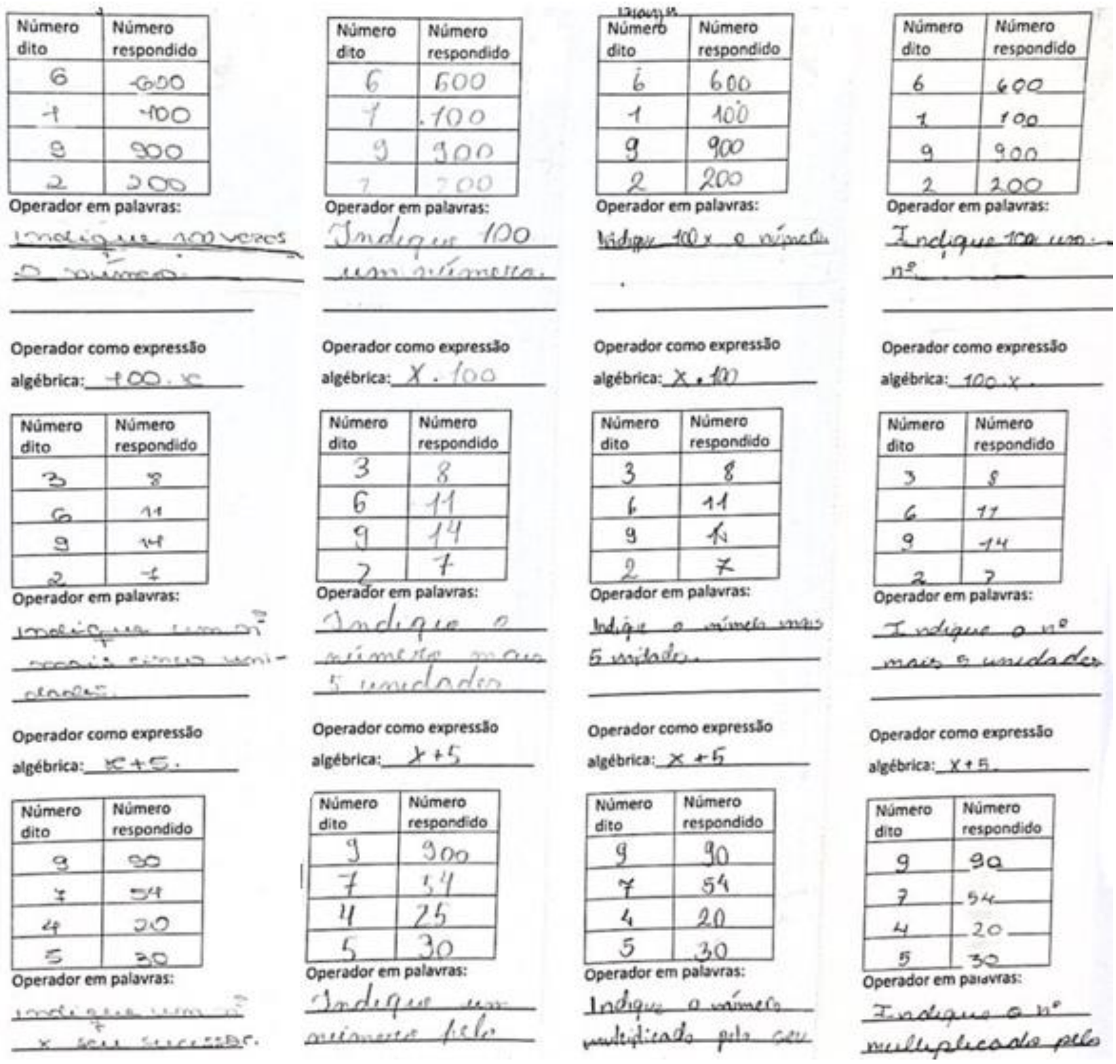
Foi orientado aos grupos que poderiam fazer pesquisa na internet das palavras que não soubessem o significado.

Enquanto jogavam, era solicitada a presença da professora para esclarecimento de dúvidas.

Nessa atividade, cada aluno fez o registro individualmente.

Para registrar o operador como expressão algébrica, a professora sugeriu que poderiam usar diferentes símbolos (letras ou qualquer outro símbolo que quisessem).

Figura 20 - Registro da questão 3 – Desvendando operadores



Fonte: imagem da autora.

Representar algebricamente o oposto de um número foi uma das dificuldades apresentadas por alguns grupos. Em um grupo, a professora realizou os questionamentos:

Professora: Qual é o oposto do número 2?

"-2".

Professora: E o oposto do 3?

"-3".

Professora: Quem opera com 2 para resultar -2? E com o 3 para resultar -3? Após um momento de silêncio, um dos integrantes responde:

"Subtrair o dobro dele"?

Foi sugerido que testassem para verificar, e assim foi feito por eles:

2 - 4 = -2; 3 - 6 = -3

Professora: Como vocês chegam ao dobro de 2?

"Fazendo 2 vezes 2"

Professora: E no dobro de 3?

"2 vezes 3"

Professora: E como chegamos ao dobro de qualquer número?

"Fazendo esse número vezes 2".

Professora: Como podemos representar um número qualquer?

"Com uma letra"

Professora: Então escolham uma letra para representar esse número.

"x".

Professora: E como podemos representar o dobro de um número?

"2x"

A professora sugeriu que analisassem novamente a frase dita por eles em como chegar ao oposto de um número e também aos cálculos que fizeram para verificar:

Frase" Subtrair o dobro dele"

Cálculos: 2 - 4 = -2 e 3 - 6 = -3

O grupo concluiu, então, que poderiam representar genericamente o oposto de um número por x - 2x e também de maneira simplificada por -x.

Outro grupo estava com a mesma dificuldade relatada acima, logo a professora repetiu os mesmos questionamentos relatados na situação anterior:

Professora: Qual é o oposto do número 2?

"-2".

Professora: E o oposto do 3?

"-3".

Professora: Quem opera com 2 para resultar -2? E com o 3 para resultar -3?

Um integrante do grupo responde:

"Multiplica por -1".

Professora: Como fica, então?

"2 · (-1) = -2".

"3 · (-1) = -3".

Professora: Como podemos generalizar?

"x · (-1) = -x".

Outro grupo solicitou a presença da professora devido ao fato de que nenhum dos integrantes conseguia descobrir o operador envolvido na situação abaixo:

Quadro 2 – Desvendando operadores

Número dito	Número respondido
5	30
7	56
8	72
9	90

Fonte: elaborado pela autora.

Eles se concentravam apenas no operador multiplicativo;

"Na primeira multiplica por 6, na segunda multiplica por 8".

Professora: Mas pode multiplicar por 6 na primeira e por 8 na segunda?

"Não, porque a operação utilizada na primeira deve ser a mesma de todas". Então, pode ter mais de uma operação".

Professora: Quais vocês acreditam que sejam?

"Pode ser, multiplicar e depois somar?"

Professora: Então, pensem qual número multiplica o 5 e depois soma com o resultado para chegar no 30.

"Pode ser $5 \cdot 5 + 5 = 30$"

E entrando 7 para sair 56?

"*Pode ser $7 \cdot 7 + 7 = 56$"*

Então, como podemos dizer a frase para qualquer situação?

"O número dito vezes ele mesmo, depois somado o resultado a ele mesmo".

Professora: Quando um número multiplica por ele mesmo, que operação podemos usar para representar?

"Potenciação".

Professora: E qual é o expoente?

"2".

Professora: Como chamamos quando a potência tem expoente 2?

"Ao quadrado".

Professora: Então, como a frase pode ser dita?

"O número ao quadrado mais ele mesmo".

Professora: E como podemos escrever a expressão algébrica?

"$n^2 + n$".

Na mesma situação citada anteriormente, um outro grupo interpretou da seguinte forma: *"O número multiplicado pelo sucessor dele".*

Quadro 3 - Desvendando operadores 2

Número dito	2	4	5	9
Número respondido	6	20	30	90

Fonte: elaborado pela autora.

A dificuldade desse grupo foi em generalizar a frase. A professora solicitou que realizassem os cálculos a partir do "número dito", de acordo com a frase mencionada acima.

Quadro 4 – Estratégia para desvenda operadores

2 · 3= 6	*4 · 5= 20*	*5 · 6 = 30*	*9 · 10= 90*

Fonte: elaborado pela autora.

Todos disseram que o sucessor do 2 é o 3, o sucessor do 4 é o 5, e assim por diante. A professora questionou-os sobre que operação precisa ser feita para chegar ao sucessor de um número qualquer e, não havendo resposta, perguntou:

Professora: Que operação se faz com o 2 para chegar ao 3?

"Somar 1".

Professora: E com o 4 para chegar ao 5?

"Somar 1".

Professora: Que operação se faz para chegar ao sucessor de um número qualquer?

"Somar 1 ao número".

A professora pediu ao grupo que desenvolvessem novamente os cálculos com as operações realizadas para chegar ao sucessor do número, na situação 2 · 3 = 6, o grupo registrou 2 · 2 + 1= 6.

Professora: Verifiquem se a igualdade é verdadeira da maneira que vocês registraram.

"4 + 1 = 5, então não está certo".

Professora: O que precisamos colocar para mostrar que queremos multiplicar o 2 pelo resultado de 2 + 1?

"Um parênteses". O grupo repete as operações utilizando os parênteses:

"2 · *(2 + 1)= 6"*

"2 · 3= 6. Agora deu certo"

Professora: Então, como é possível generalizar a frase: O número multiplicado pelo sucessor dele?

O grupo, logo, registrou a expressão n · (n + 1).

Após esse momento, a professora pediu aos dois grupos relatados acima que explicassem para a turma toda a forma como pensaram e resolveram a situação do quadro 2

Após isso, a professora escreveu as expressões n· (n + 1) e $n^2 + n$ no quadro e pediu aos alunos para compararem as duas. Surgiram relatos como:

"São a mesma coisa"; "Dá o mesmo resultado"; "Quando multiplica a primeira, chega na segunda"; "Uma é o caminho de volta da outra".

Foi interessante para eles o fato de saberem que não há um único caminho, uma única maneira de pensar.

Nas situações relatadas acima, foi possível observar como é difícil para os alunos construir generalizações e que isso demanda tempo. Muitos alunos perceberam a função do operador, porém não conseguiram escrever a expressão que a generaliza. Conforme trabalhos de Kaput (1999), Kieran (1976, 1980), entre outros, generalizar é a capacidade do indivíduo pensar e expor aquilo que há em comum em determinada situação. Esses autores colocam que essas generalizações devam ser exploradas desde os primeiros anos escolares.

Ao final da atividade, a professora solicitou que cada grupo fizesse um relato escrito da atividade realizada.

Alguns grupos decidiram fazer um só relato, outros - no entanto - acharam melhor fazer individuais:

"Nosso grupo achou muito interessante esta atividade, pois reforçou nosso ensino com base nas operações usadas na matemática".

"Achamos o trabalho fácil. O que tivemos dificuldade foram as questões que envolviam potenciação e uso de palavras como sucessor e número oposto".

"Nosso grupo achou o jogo muito legal, divertido e desafiador. O jogo requer muita atenção, concentração e paciência, pois é um passatempo para fritar o cérebro. Você aprende diversas expressões numéricas e formas diferentes de obter o mesmo resultado,

também trazendo certa competitividade entre os integrantes do grupo. Foi uma experiência coletiva, porém competitiva, algo que ninguém tinha jogado".

"Eu achei este jogo divertido e que quebra muito a cabeça de quem está pensando, às vezes você pensa uma coisa e outra pessoa pensa em outra que faz sentido e então fica na discussão de qual está certo".

"Eu achei legal porque é uma forma massa de se estudar. Eu tive dificuldade de entender o quadrado de um número. Trabalhar em grupo é muito bom porque cada pessoa pensa diferente".

"O jogo é divertido e tenso também, porque você fica nervoso para acertar pois não quer errar na frente dos colegas. Precisa pensar bastante".

De forma geral, foi possível perceber que os alunos gostaram da atividade proposta, percebendo-a relevante para a aprendizagem matemática.

A generalização foi o objetivo principal da atividade. Sobre esse tema, Kaput (1999) expressa que a generalização e a formalização são próprias do pensamento matemático, sendo elas que tornam esses pensamentos matemáticos.

Carraher *et al*. (2006) acredita que, ao trabalhar os conceitos gradualmente, é possível perceber a evolução do aluno. Partindo de situações simples, e aumentando o nível de dificuldade, as operações algébricas vão se tornando necessárias e significativas.

Na aula do dia 2 de agosto, foi retomada a atividade "Desvendando Operadores". Os grupos jogaram novamente e, após, foi proposto a questão 2, de forma semelhante ao jogo, em que cada grupo deveria descobrir o operador e expressar generalidade por meio da análise dos números ditos e respondidos.

Figura 21 - Questão 2 - descobrir e expressar generalidade.

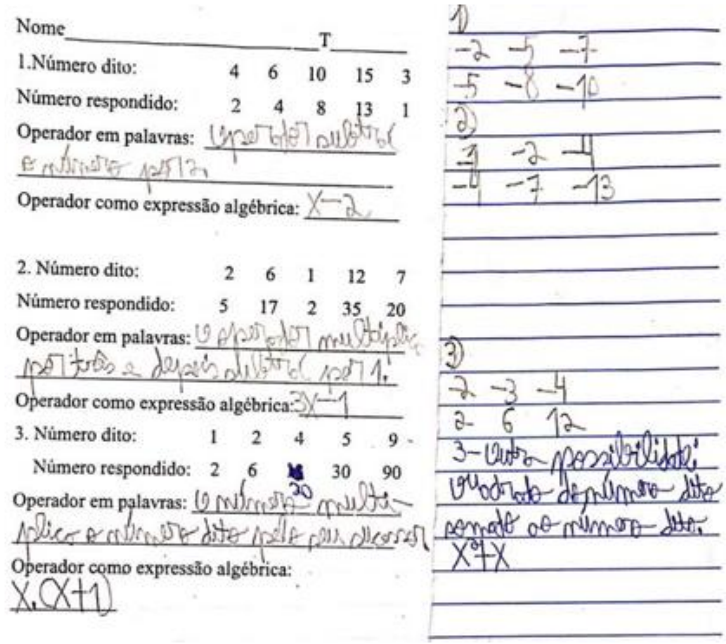
a. Número dito: 4 6 10 15 3
Número respondido: 2 4 8 13 1
Operador em palavras: ______________________
Operador como expressão algébrica: ______________________

b. Número dito: 2 6 1 12 7
Número respondido: 5 17 2 35 20
Operador em palavras: ______________________
Operador como expressão algébrica: ______________________

c. Número dito: 1 2 4 5 9
Número respondido: 2 6 12 30 90
Operador em palavras: ______________________
Operador como expressão algébrica: ______________________

Fonte: imagem da autora.

Figura 22 - Registro da questão 2 - descobrir e expressar generalidade.


Nome ______________________ T ______
1.Número dito: 4 6 10 15 3
Número respondido: 2 4 8 13 1
Operador em palavras: O operador subtrai o número por 2.
Operador como expressão algébrica: X-2

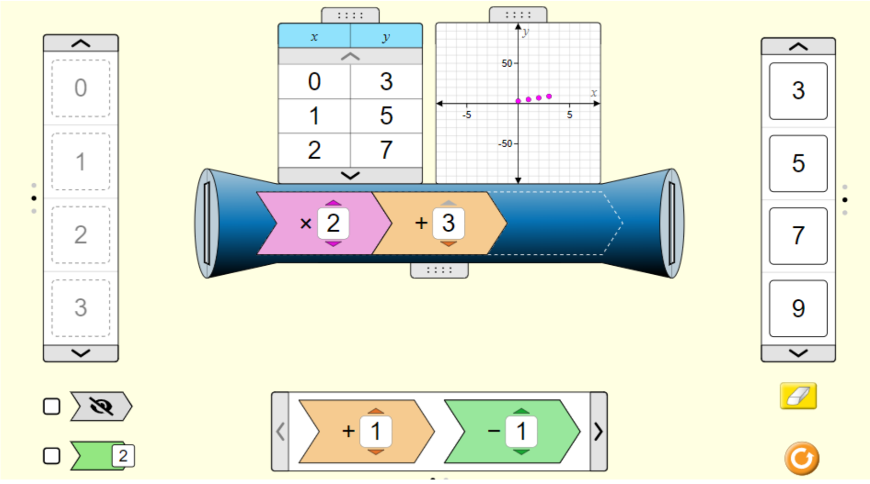
2. Número dito: 2 6 1 12 7
Número respondido: 5 17 2 35 20
Operador em palavras: O operador multiplica por três e depois subtrai por 1.
Operador como expressão algébrica: 3X-1
3. Número dito: 1 2 4 5 9
Número respondido: 2 6 ~~12~~ 20 30 90
Operador em palavras: O número multiplica o número dito pelo seu sucessor
Operador como expressão algébrica:
X.(X+1)

1)
-2 -5 -7
-5 -8 -10
2)
-1 -2 -4
-4 -7 -13
3)
-2 -3 -4
2 6 12
3- Outra possibilidade:
quadrado do número dito
somado ao número dito.
X²+X

Fonte: imagem da autora.

Após concluírem a questão 2, cada aluno deveria representar os valores dos números ditos e respondidos em um gráfico. Para tanto, a professora acessou novamente o simulador Phet Colorado na tela equações, inseriu operadores e algumas entradas sugeridas pela turma, em que foi possível visualizar essas entradas e saídas no gráfico que o simulador originou.

Figura 23 - Análise de gráfico na tela equações



Fonte: imagem da autora.

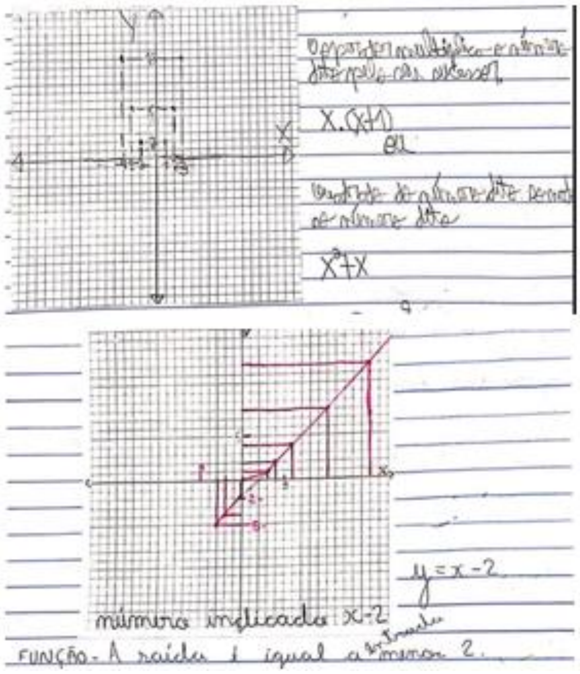
A partir do gráfico, a professora realizou alguns questionamentos com os alunos:

Professora: No gráfico, onde podemos visualizar os valores referentes às entradas e as saídas?

Analisando o gráfico, os alunos responderam que os valores das entradas estavam na linha horizontal e os valores das saídas na linha na linha vertical.

Cada aluno recebeu papel quadriculado e, nos grupos, construíram os gráficos referentes à questão 2. A professora sugeriu que representassem a função por meio da frase e expressão, utilizando as palavras entrada e saída com seus respectivos símbolos.

Figura 24 - Gráficos da questão 2 - descobrir e expressar generalidade.



Fonte: imagem da autora.

Os gráficos constituem uma das maneiras que as funções podem ser interpretadas e o objetivo aqui foi justamente esse, que os alunos percebessem as diferentes formas de ler uma função. Segundo Carraher *et al.* (2006), por meio do gráfico de uma função, o aluno pode perceber alguns pontos importantes como: a "lei" para sua construção, as relações funcionais, possibilitando a comparação entre diferentes funções.

5.4 ATIVIDADE: JOGO- CORRIDA DE OPERADORES

Essa atividade tratou-se de um jogo e foi aplicada no dia 23/08/2022. Teve como objetivo compreender as operações algébricas como operadores. Cada casa do tabuleiro representa o operador (expressão algébrica de uma função) e as cartas representam as entradas (conjunto domínio).

Cada grupo recebeu 1 tabuleiro; marcadores diferentes; 1 dado; 18 cartas com números positivos, sendo três cartas de cada um dos seguintes valores: +1, +2, +3, +4, +5, +6; 18 cartas de números negativos, sendo três cartas de cada um dos seguintes valores: -1, -2, -3, -4, -5, -6; e 5 cartas zero.

Os grupos registraram em seus cadernos os cálculos realizados, devendo seguir as regras:

1. As cartas são embaralhadas e colocadas nos respectivos lugares do tabuleiro viradas para baixo;

2. Os jogadores posicionam seus marcadores sobre o tabuleiro no ponto de partida;

3. Cada jogador, na sua vez, lança o dado e avança o número de casas igual ao número obtido no dado e retira uma carta de um dos montes à sua escolha;

4. Efetuam-se os cálculos e o resultado obtido indica o valor bem como o sentido do movimento. Se for positivo, avança o número de casas correspondentes ao número obtido. Se for negativo, recua o número de casas correspondentes ao número obtido. Se for zero, não se desloca;

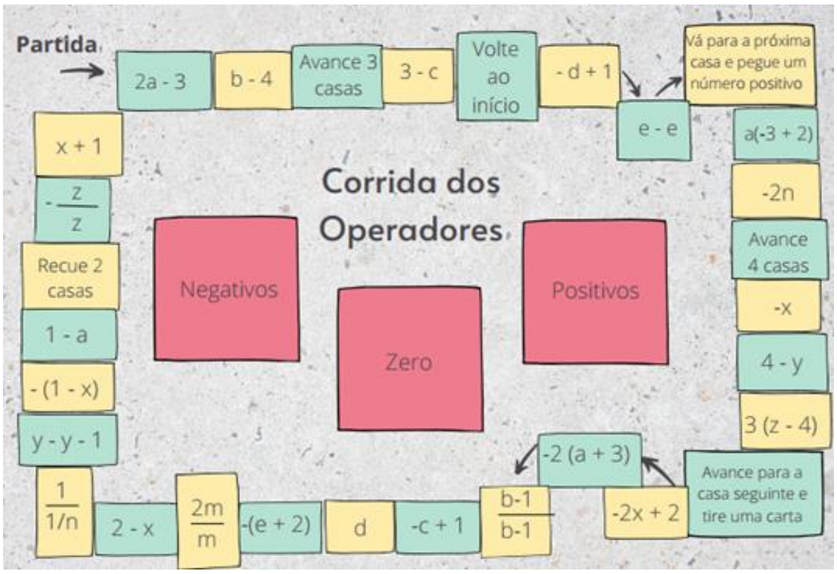
5. Se o marcador cair em uma casa que contenha uma instrução, o jogador deverá executá-la nessa mesma jogada;

6. Sempre que o jogador escolher um número que anule o denominador da expressão, deverá voltar à casa de partida;

7. O vencedor é o jogador que completar em primeiro lugar duas voltas no tabuleiro;

8. Caso um dos três montes de cartas esgote-se antes do final do jogo, então as respectivas cartas devem ser embaralhadas e recolocadas no tabuleiro.

Figura 25 - Tabuleiro do jogo corrida de operadores



Fonte: imagem da autora.

Cada integrante do grupo deveria registrar em seu caderno os cálculos realizados em cada jogada. Enquanto jogavam, surgiam dúvidas e a presença da professora era solicitada.

Em um grupo, um aluno estava na casa b - 4, retirou a carta - 2, registrou - 2 - 4 e perguntou:

“Aqui profe, faz jogo dos sinais”?

Professora: O que tu achas? Como tu fazes a leitura dessa expressão?

“Devo 2 e devo 4”.

Professora: E aí?

“Fico devendo 6”.

Em outro grupo, um aluno, que estava na mesma casa referida acima, retirou a carta +6, escrevendo 2 - (+6) - 3. A professora, então, o questiona:

Por que esse sinal operatório aqui? (Se referindo ao sinal de subtração após o número 2).

“Não sei”.

Professora: Em 2a, que operação o “2” faz com o número a?

“Ah, está multiplicando”.

Um aluno, que estava na casa com o operador a(-3 + 2), retirou a carta + 4 e perguntou:

“Eu multiplico o 4 por -3 e depois por 2?

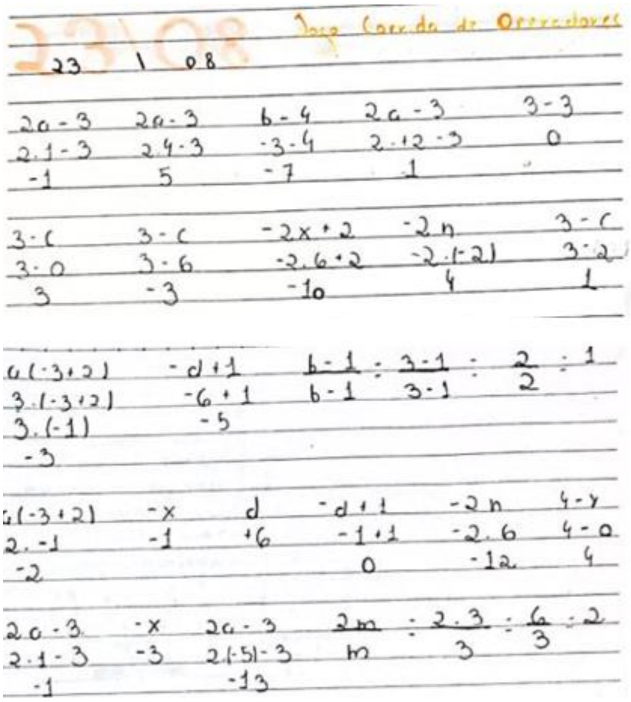
Professora: Se aplicar a propriedade distributiva da multiplicação, sim.

Nesse momento, outro aluno do grupo intervém:

“Ou pode juntar o-3 com o 2 e depois multiplicar o resultado pelo 4”.

A professora orientou que cada um resolvesse da maneira que sugeriu, comparando os resultados.

Figura 26 - Registro do jogo corrida de operadores



Fonte: imagem da autora.

Nessa atividade, foi possível perceber as dificuldades que muitos alunos apresentaram para trabalhar com as expressões algébricas, mesmo que esse conteúdo tenha sido desenvolvido no 7º e 8º ano. Esse fato pode ser justificado devido à pandemia do Coronavírus que impossibilitou aulas presenciais nos anos de 2020 e parte de 2021, mas também por meio das ideias de Ponte *et al*. (2009), que atentam para a ênfase dada ao trabalho em Álgebra com a manipulação de símbolos e letras em detrimento da compreensão dos conceitos.

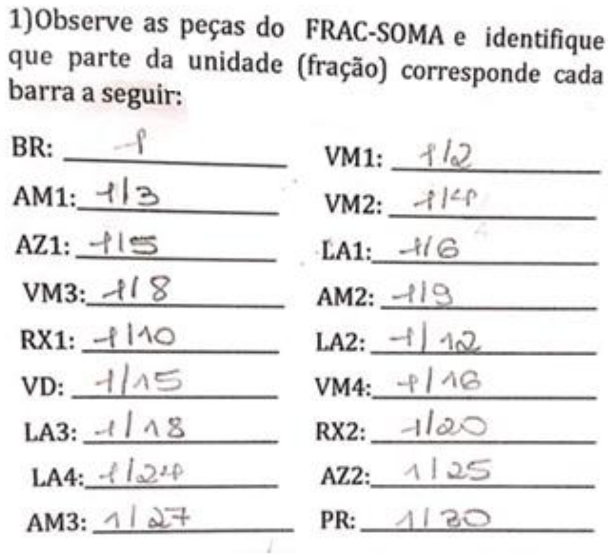
Apesar das dificuldades apresentadas na realização dos cálculos algébricos por alguns grupos, o objetivo da atividade foi atingido, pois - no decorrer do jogo - os alunos compreenderam as expressões algébrica como operadores, transformando as posições iniciais nas finais.

5.5 ATIVIDADE: FRAÇÃO COMO OPERADOR

Essa atividade foi aplicada nos dias 6, 13 e 14 de setembro e teve como objetivo compreender as frações como operador multiplicativo.

No dia 13/09, foi aplicada a ficha de trabalho 1. Os alunos formaram grupos com quatro integrantes, receberam as peças do FRAC-SOMA 235, as quais deveriam observar, identificar que parte da unidade (fração) correspondia cada barra e anotar na folha de registro conforme a figura abaixo:

Figura 27 - Registro da questão 1 - Fração como operador

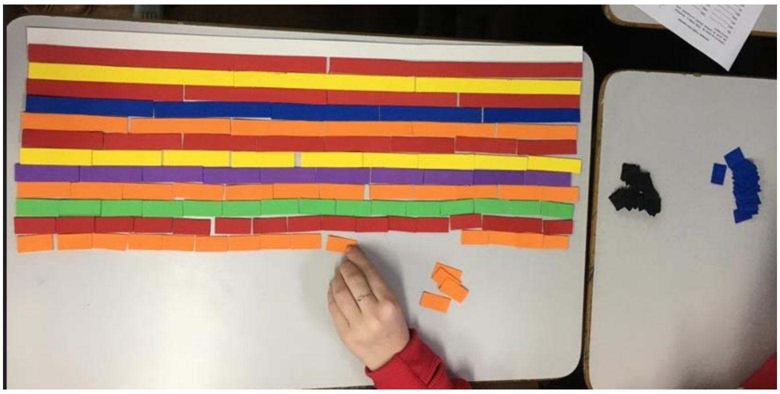


1)Observe as peças do FRAC-SOMA e identifique que parte da unidade (fração) corresponde cada barra a seguir:

BR: 1	VM1: 1/2
AM1: 1/3	VM2: 1/4
AZ1: 1/5	LA1: 1/6
VM3: 1/8	AM2: 1/9
RX1: 1/10	LA2: 1/12
VD: 1/15	VM4: 1/16
LA3: 1/18	RX2: 1/20
LA4: 1/24	AZ2: 1/25
AM3: 1/27	PR: 1/30

Fonte: imagem da autora.

Figura 28 - Alunos organizando as peças do FRAC-SOMA 235



Fonte: imagem da autora.

A segunda questão da atividade tinha a seguinte orientação:

Tome uma peça VM1 e suponha que ela seja uma espécie de varinha mágica que tenha a propriedade de, ao tocar outra peça, dividi-la em duas partes iguais, retendo uma dessas partes. Exemplo: Quando VM1 toca AM1, produz-se uma peça LA1, que é metade de AM1.

Na sequência, eles deveriam operar com as peças e responder às questões:

a) O que acontece, então, quando VM1 toca AZ1?

“Ele se torna o roxo 1”; “Torna-se o RX1, pois é a metade do AZ1”.

b) E quando toca LA2?

“Ele se torna o laranja 4”; “Torna-se o LA4, porque é a metade do LA2”.

c) E quando toca RX1?

“Ele se torna o roxo 2”; “Torna-se o RX2, porque é a metade do RX1”.

d) A peça AM1 também pode ser considerada como operador?

“Sim”; “Não, mas ela pode ser considerada a entrada"; "Sim, pois ele divide os outros por 3”.

e) Qual o efeito produzido quando AM1 toca VM1?

“Ele se torna laranja 1”; “Torna-se o laranja 1, porque se o VM1 que é ½ divide por dois, o AM1 divide por 3”.

f) As demais peças do FRAC-SOMA 235 também podem ser consideradas como operadores?

“Sim”; “Sim, eles vão dividir a entrada conforme eles são divididos”.

g) Que operador representa BR?

“1 inteiro”; “O operador BR é um operador neutro, então ele pode ser multiplicado por 1”; “Ele é um operador que não se altera”.

Analisando as respostas dadas pelos grupos, foi possível perceber que eles compreenderam que as frações poderiam ser operadores, transformando um número em outro. Corroborando, conforme Vergnaud (2009), a fração com o significado de operador multiplicativo está ligada ao papel de transformação, ou seja, algo incide sobre uma determinada situação e a modifica.

Notou-se que apenas um grupo demonstrou dificuldade em compreender que qualquer fração pode assumir a função de operador, como visto na resposta da pergunta (*d).*

Na terceira questão, os grupos deveriam preencher os diagramas com peças do FRAC-SOMA 235, seguindo às orientações: Se a peça dentro da bandeira, considerada como operador, atuar sobre a peça que está no círculo 1, o resultado deve ser a peça que está no círculo 2. Segue abaixo as perguntas que orientaram o trabalho dos grupos na questão 3:

a) Pondo LA1, no círculo 1 e AM1 na bandeja, que peça deve ser posta no círculo 2?

b) Pondo LA1 na bandeira e PR1 no círculo 2, que peça deve ser posta no círculo 1?

c) Pondo VM2 no círculo 1 e RX2 no círculo 2, que peça deve ser posta na bandeira?

d) Pondo uma peça VM1 no primeiro círculo e duas peças AM1 na bandeira, que peça deve ser posta no segundo círculo?

e) Pondo LA1 no círculo 1 e LA4 no círculo 2, que peça deve ser posta na bandeira?

f) Pondo AM2 na bandeira e AM3 no círculo 2, que peça deve ser posta no círculo 1?

g) Pondo AZ1, no círculo 1 e AM1 na bandeja, que peça deve ser posta no círculo 2?

Nas situações acima, notou-se maior facilidade por parte dos alunos naquelas em que foi dada a entrada e o operador, tendo que encontrar a saída. Assim, os mesmos encontraram maior dificuldade naquelas em que deveriam encontrar o operador ou a entrada, pois nessas deveriam pensar a reversibilidade.

Quando solicitada a presença da professora para esclarecer dúvidas na questão b, a qual faltava o operador, foi realizado o seguinte questionamento:

Professora: Em quantas partes o azul 1 deve ser dividido para resultar uma peça do preto? Como vocês podem proceder para descobrir?

Os alunos foram testando até que um dos integrantes disse que deveriam ver quantas peças pretas caberiam dentro de uma AZ1. Dessa forma, perceberam que precisavam de 5 peças pretas para ter uma AZ1, ou seja, a peça azul deveria ser dividida em seis partes, concluíram, então, que o operador era a peça laranja 1.

Também foi possível constatar dificuldades na questão (d), em que o operador era representado por duas peças em amarelo 1, correspondente à fração $\frac{2}{3}$.

Nesse momento os grupos solicitaram a presença da professora para esclarecer essa situação, que por sua vez perguntou qual era o operador envolvido nele. Todos responderam ser $\frac{2}{3}$. A professora retornou à situação dada como exemplo na atividade:

Figura 29 - Diagrama questão 3 - Fração como operador - Ficha de trabalho 1

Fonte: imagem da autora.

Nesse exemplo, o operador era uma peça do AM1, correspondente a $\frac{1}{3}$, referente a isso foram realizados os questionamentos:

Professora: Qual é a propriedade do AM1?

"Dividir em três partes e pegar uma".

Professora: Nessa nova situação, o operador continua sendo o AM1, então qual é a sua propriedade?

"Dividir em três partes?".

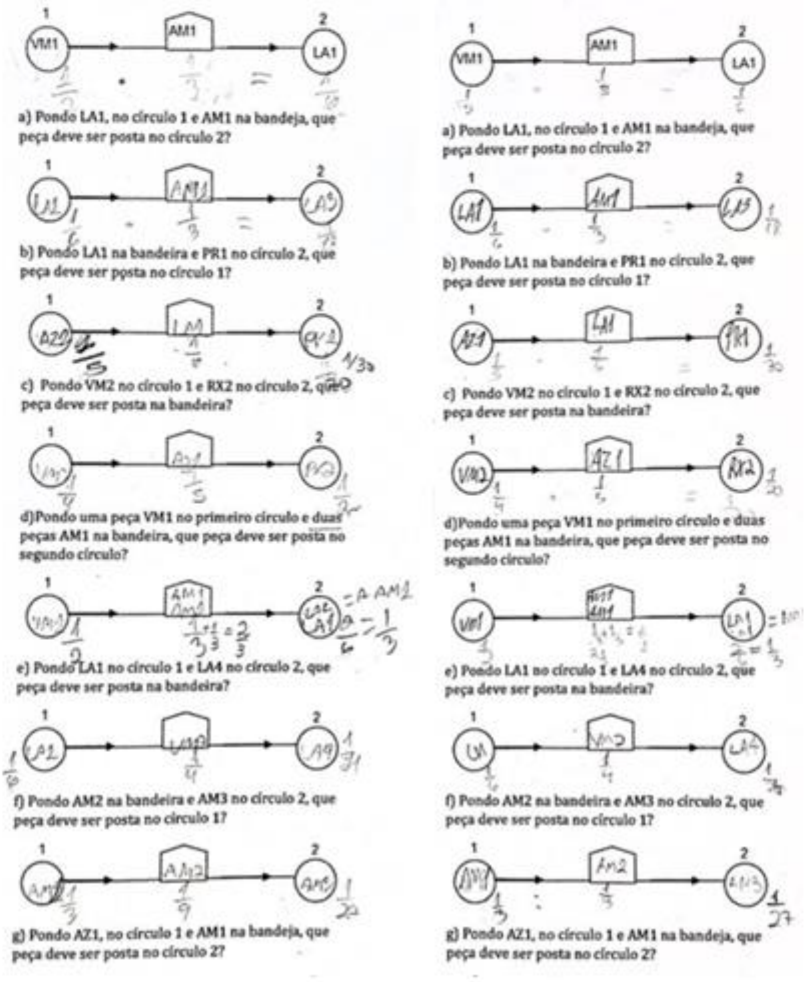
Professora: Certo, mas agora ele é formado por duas peças do AM1, ao invés de uma. Então, qual será a propriedade dele nessa situação?

"Dividir em três partes e pegar duas?".

Professora: Exatamente.

Após concluírem a atividade, a professora solicitou aos grupos que registrassem na questão 3 as frações correspondentes às tiras, questionando-os sobre qual operação matemática estava envolvida na entrada e o operador para resultar a saída. Os grupos concluíram ser a multiplicação. Kieren (1976) pontua que a interpretação das frações como operador colabora na compreensão da multiplicação dos racionais.

Figura 30 - Registro da questão 3 - Fração como operador - Ficha de trabalho 1



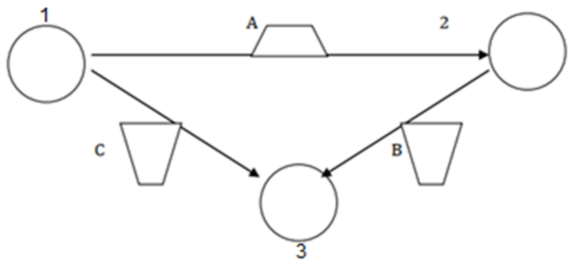
Fonte: imagem da autora.

No dia 13 de setembro, foi aplicada a segunda ficha de trabalho. Na primeira questão da atividade, os alunos deveriam preencher o diagrama abaixo seguindo as orientações dadas.

Coloque VM1 na bandeira A, AM1 na B e AZ1 no círculo 1.

a) Preencha a bandeira e os dois círculos restantes segundo a convenção já utilizada da FT-1.

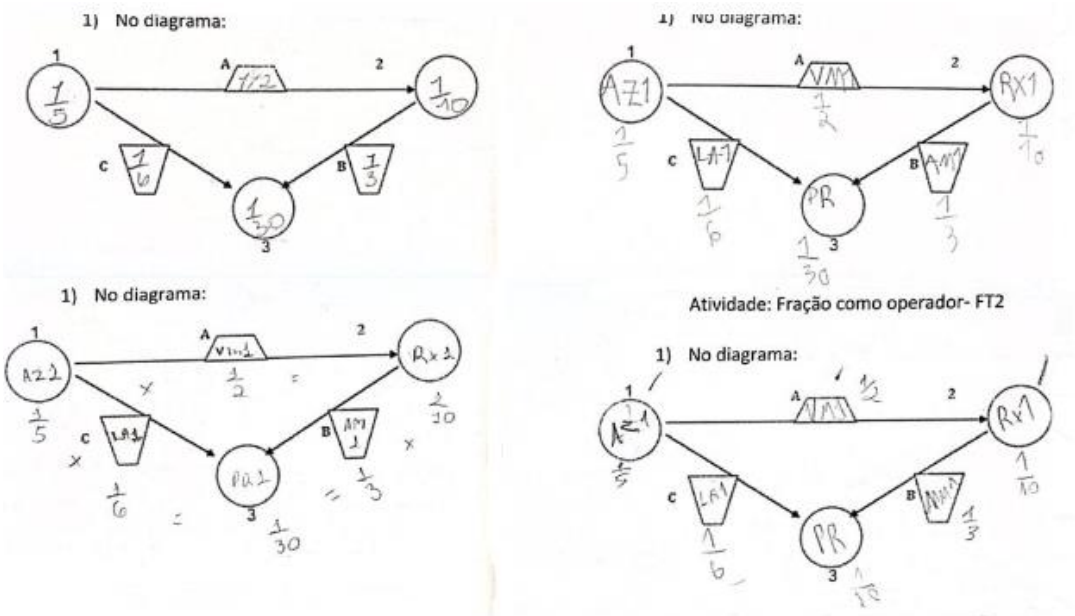
Figura 31 - Diagrama da questão 1 - Fração como operador- ficha de trabalho 2



Fonte: Frac-Soma 235: significantes manipuláveis, registrado na Biblioteca Nacional, Rio de Janeiro, sob o nº 30262 em 2 de abril de 1984.

De forma geral, foi possível verificar que os grupos conseguiram realizar a questão com certa facilidade; conforme colocavam as peças no diagrama, escreviam também as frações correspondentes a elas.

Figura 32 - Registro da questão 1a - Fração como operador ficha de trabalho 2



Fonte: imagem da autora.

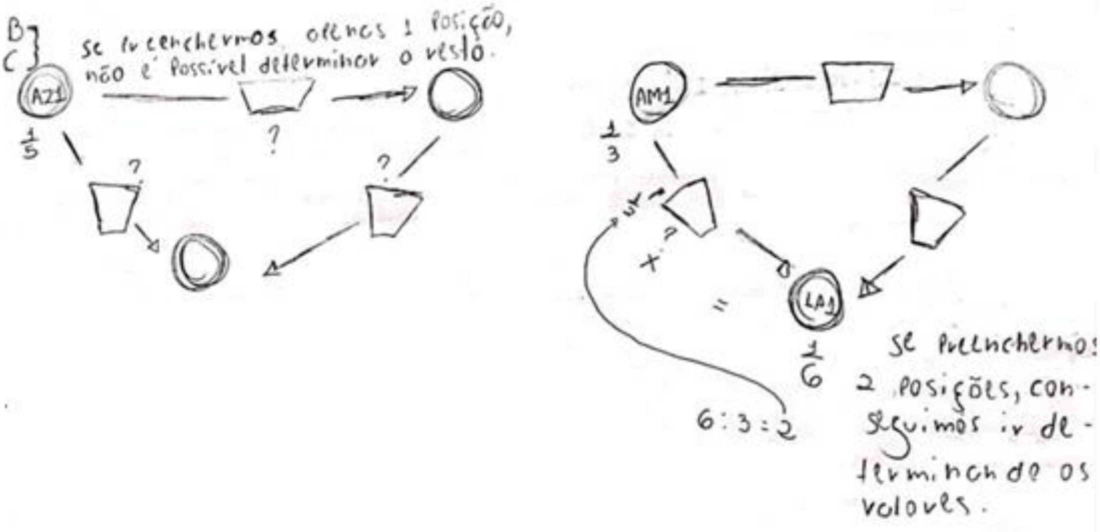
b) Quantas posições devem ser preenchidas nesse diagrama para que as demais fiquem bem determinadas?

Nessa questão, quatro grupos entenderam que seria necessário preencher três posições; dois grupos responderam que era necessário preencher duas posições; e um grupo escreveu que era preciso preencher quatro posições.

c) Examine todos os casos possíveis e faça um exemplo de cada um.

Apenas um grupo registrou essa questão.

Figura 33 - Registro da questão 1c - Fração como operador ficha de trabalho 2

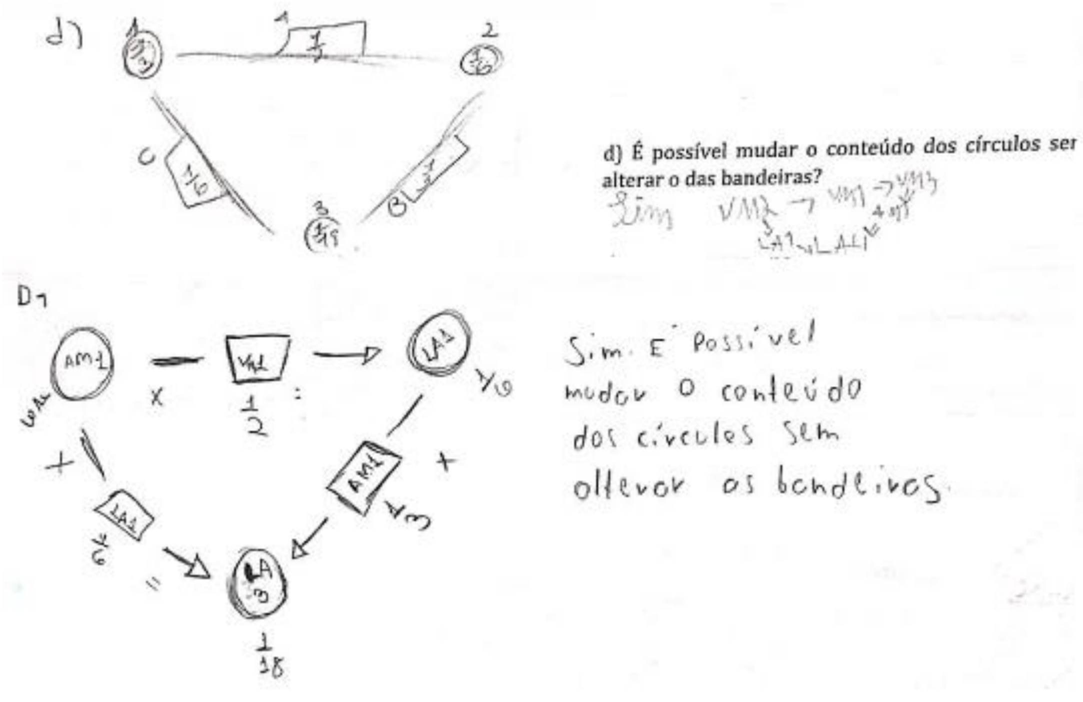


Fonte: imagem da autora.

d) É possível mudar o conteúdo dos círculos sem alterar o das bandeiras?

Todos os grupos concluíram ser possível, porém nem todos registraram.

Figura 34 - Registro da questão 1c - Fração como operador ficha de trabalho 2



Fonte: imagem da autora.

Na questão 2, os grupos deveriam verificar se, trocando as posições da entrada e do operador entre si, mudaria ou não a saída.

a) Coloque VM1 no círculo 1 e AZ1 na bandeira. Preencha o círculo 2.

b) Agora, troque os conteúdos do círculo 1 e da bandeira entre si. Preencha o círculo 2. Que conclusão se pode tirar?

c) Coloque AM1 no círculo 1, VM2 na bandeira e preencha o círculo 2.

e) Agora, troque os conteúdos do círculo 1 e da bandeira entre si e preencha o círculo 2.

Que conclusão se pode tirar?

Seguem as conclusões dos grupos referentes às questões apontadas acima:

"Quando troca o operador pela entrada, a saída continua igual".

"O resultado continua o mesmo quando invertemos os conteúdos".

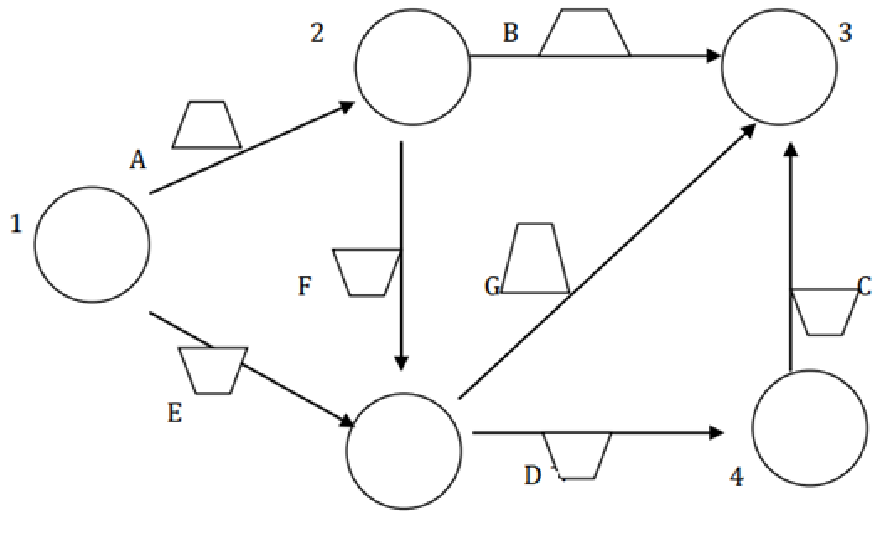
"Que trocando de lugar o círculo pela bandeira, dá o mesmo resultado".

"Concluímos que fica o mesmo resultado".

"Pode-se concluir que mudar a ordem não muda o resultado".

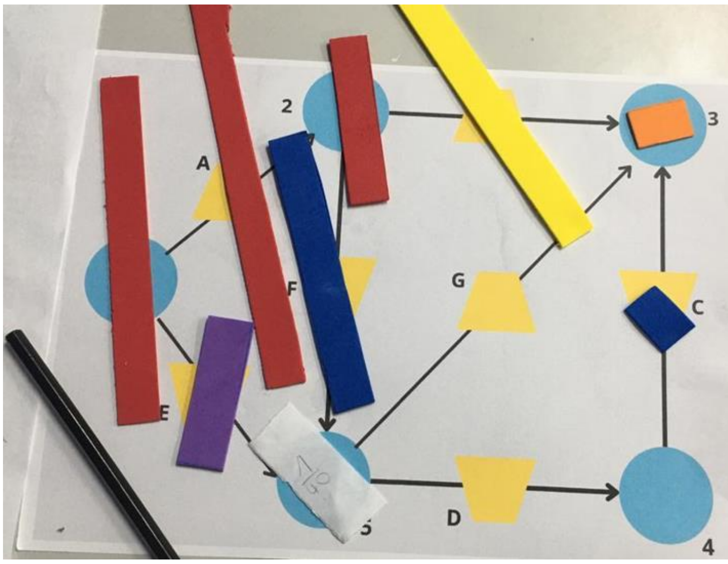
A terceira questão da atividade tinha a seguinte orientação: Agora, cada componente do grupo deverá ir preenchendo sucessivamente os círculos e as bandeiras, contíguos aos já preenchidos, até que o diagrama abaixo esteja completamente preenchido.

Figura 35 - Diagrama da questão 3 - Fração como operador - ficha de trabalho 2



Fonte: Frac-Soma 235: significantes manipuláveis, registrado na Biblioteca Nacional, Rio de Janeiro, sob o nº 30262 em 2 de abril de 1984.

Figura 36 - Grupo resolvendo a questão 3 - Fração como operador - ficha de trabalho 2

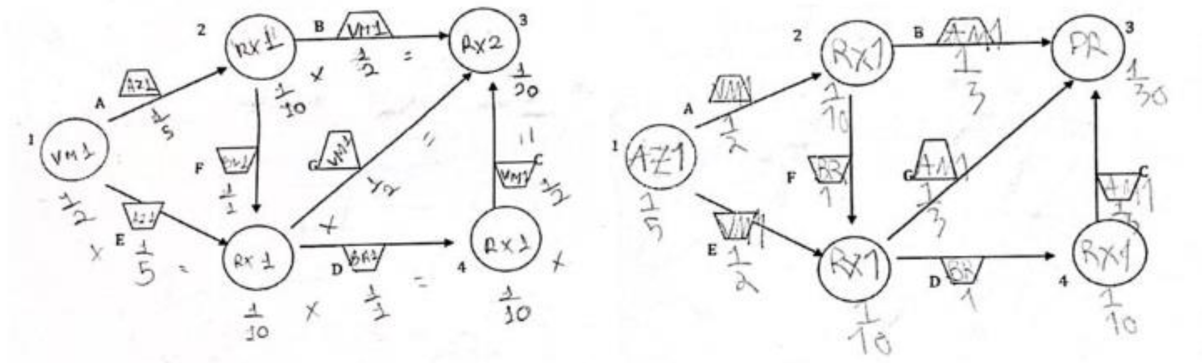


Fonte: imagem da autora.

Nessa questão, foi possível perceber que os grupos utilizaram a peça branca, correspondente a um inteiro, como recurso para completar o diagrama. Podemos afirmar que eles compreenderam a peça um inteiro como operador neutro, que facilitou o preenchimento do diagrama.

Três grupos não concluíram a atividade devido ao tempo e também porque demonstraram maior dificuldade.

Figura 37 - Registro da questão 3 - Fração como operador - ficha de trabalho 2



Fonte: imagem da autora.

No dia 14 de setembro, foi realizada a discussão geral com a turma a respeito das atividades, envolvendo fração como operador. Inicialmente, a professora questionou a turma sobre qual a função do operador, os alunos responderam, praticamente de maneira unânime, que “o operador muda a entrada”. Sobre esse questionamento, ficou claro que a turma compreendeu o significado do operador.

Referente à ficha de trabalho 1, a professora retomou algumas das questões 3, solicitando que os grupos expressassem para a turma a forma que pensaram para resolver tais situações.

Professora: Na questão 3b: Pondo LA1 na bandeira e PR1 no círculo 2, que peça deve ser posta no círculo 1?

Um aluno respondeu:

“Precisa ver quantas peças pretas cabem dentro da laranja”.

Outro aluno intervém:

“É mais fácil fazer pela conta”.

Professora: Que conta? Se referindo ao cálculo realizado.

“Divide o resultado pela entrada”.

A professora questiona sobre as frações correspondentes à entrada e saída nessa situação, os alunos respondem que nessa situação o resultado corresponde a $\frac{1}{30}$ e a entrada corresponde a $\frac{1}{5}$. Nesse momento, a professora relembra com eles o processo para realizar a divisão de duas frações. É solicitado ao grupo que venha até o quadro para mostrar aos demais o cálculo realizado.

Professora: Na questão 3c: Pondo VM2 no círculo 1 e RX2 no círculo 2, que peça deve ser posta na bandeira?

Um aluno respondeu que o grupo fez por meio do cálculo. Quando solicitado a justificar o pensamento utilizado, ele disse que já havia entendido que era multiplicação, então sabendo que a entrada VM2 corresponde a $\frac{1}{4}$ e a saída RX2 corresponde a $\frac{1}{20}$, tinha que pensar “qual o número multiplicado por 4, resulta 20”.

Professora: Tem algum grupo que utilizou as peças do Frac-Soma? Como pensou?

Um aluno relatou: *“Precisa ver quantas peças vermelhas 2 cabem dentro da roxa 2”.*

Professora: Estão certos disso?

Outro aluno intervém: “*Não é isso. Precisa pensar quantas peças roxas 2 cabem dentro da vermelha 2”.*

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo aqui apresentado teve por objetivo investigar a possibilidade de construir o conceito de função no Ensino Fundamental a partir de uma sequência de atividades na perspectiva de transformação por meio do operador funcional. O trabalho foi centralizado nas ideias do Pensamento Matemático Avançado, que tem sua base no Pensamento Algébrico e Funcional.

A realização da pesquisa se justificou pela necessidade de os estudantes de nível superior desenvolverem o Pensamento Matemático Avançado. Propusemo-nos a conhecer, por meio de um estudo bibliográfico, o pensamento e os trabalhos publicados de autores e pesquisadores referente ao desenvolvimento do pensamento Matemático Avançado, o pensamento algébrico, pensamento funcional e conceito de operador matemático.

A pesquisa teórica aponta que o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, focado nas deduções e provas, precisa iniciar ainda na educação básica com o desenvolvimento do pensamento algébrico e funcional. Identificamos também que o conceito de operador, amplamente utilizado em disciplinas do Ensino Superior, é tratado como função na Educação Básica (*Encyclopedia of Mathematics*, 2020). Os autores pesquisados apontam que as funções podem ser exploradas sob aspectos e representações diferentes. Logo, nesse sentido, entendemos que as funções sob o ponto de vista de transformações estão alinhadas com a fundamentação teórica do Pensamento Matemático Avançado.

Procurou-se desenvolver a sequência de atividades para um estudo colaborativo e significativo ao aluno, focado no trabalho grupal. Nessas considerações finais, apresentaremos nossas reflexões sobre a investigação que realizamos, buscando responder à questão: “Como abordar o conceito de Função no Ensino Fundamental por meio do conceito de operador?”

A primeira atividade, denominada “Operadores que transformam", foi realizada utilizando o simulador Phet Colorado e teve como objetivo compreender a ideia de transformação de determinada entrada em uma máquina, identificar a entrada, saída e o operador responsável por essa transformação. Antes de iniciar a atividade no simulador, questionados pela professora, os alunos citaram algumas máquinas que possuíam em suas casas, sinalizando para aquilo que entrava e como saía de cada uma delas. Alguns alunos relataram que cada máquina é programada para fazer alguma coisa, sendo que existem máquinas com uma ou mais funções.

No simulador, eles puderam perceber as mudanças ocorridas com as imagens inseridas na entrada, de acordo com a programação escolhida por eles, e a professora acordou com os alunos em nomear de operador a programação responsável pelas mudanças. Ou seja, compreenderam o operador como transformação atuando de um grupo para outro.

Os alunos reagiram positivamente à realização da atividade, principalmente ao fato de ser realizada em grupo. Pelos relatos escritos, foi possível constatar que, no entendimento deles para realizar a atividade proposta, necessita pensar que o trabalho grupal exige saber ouvir a opinião dos colegas e como cada um tem uma opinião. Isso gera dúvida que precisa ser ajustada no grupo.

Ao final da atividade, houve um relato muito significativo de um aluno, no qual disse entender a relação da atividade proposta (máquina que transforma imagens) com a matemática, pois os operadores podem ser as operações matemáticas que transformam números em outros. Quando o aluno compreende que os sinais operatórios constituem operadores, responsáveis por transformar, acreditamos ter atingido grande parte do nosso objetivo, pois segundo *Encyclopedia of Mathematics* (2020), um operador é um mapeamento ou transformação que atua de um grupo para outro.

A segunda atividade, denominada "Descrevendo operadores", também foi realizada utilizando o simulador Phet Colorado e teve como objetivo descrever o operador responsável pelas transformações de um grupo de entradas, para determinar a saída; e prever saídas de um determinado operador, usando uma determinada entrada e construir operadores para criar uma nova função. Essa atividade foi composta de três tarefas: utilizando a tela numérica, a tela equação e a tela misteriosa. As entradas então eram números e os operadores podiam envolver uma ou mais operações. Os grupos deveriam descrever quais eram esses operadores.

Concluímos ter atingido o objetivo da atividade, pois os grupos conseguiram descrever os operadores envolvidos em uma determinada situação, porém uma das dificuldades apresentadas pelos grupos nessa atividade foi expressar o pensamento de maneira escrita e na linguagem matemática. A matemática tem a sua linguagem própria, formada por uma gama de signos, conhecer essa linguagem é fundamental para se comunicar matematicamente (VIGOTSKI, 2009). Constatou-se, portanto, que o pensamento algébrico não estava consolidado e grande parte dos alunos era orientado pela professora de que eles deveriam escrever a frase de maneira que fosse entendida por qualquer pessoa que a lesse.

A terceira atividade, denominada "Desvendando operadores", consistiu em um jogo e teve como objetivo estabelecer relações entre a linguagem em prosa e a linguagem algébrica simbólica, bem como perceber as operações algébricas como operadores. Em cada rodada, um dos participantes era o *Mestre*, cada jogador do grupo falava um número e o jogador em posse da frase, chamado de *Mestre*, deveria operar com esse número o que a frase indicava. A descoberta se deu por meio da análise das respostas dadas por quem tinha a frase nas mãos, ou seja, o *Mestre*.

Constatamos que o objetivo da atividade foi atingido, pois por meio da análise os alunos, conseguiram desvendar os operadores envolvidos. As dificuldades apresentadas nessa atividade estavam relacionadas com a compreensão do vocabulário matemático utilizado. Para tanto, poderiam buscar o significado desses termos em dicionários ou internet. Representar algebricamente os operadores foi outra dificuldade encontrada pelos grupos. Nesse sentido, houve intervenções da professora com questionamentos que auxiliaram na compreensão. Apesar das dificuldades relatadas, a atividade foi apreciada pelos alunos, percebida nos relatos como uma maneira interessante e diferente de aprender. Novamente, levantaram a questão do trabalho grupal como positiva, no qual o pensar diferente gera discussões e aprendizagem. O medo de errar também foi relatado.

A quarta atividade, denominada "Corrida de operadores", consistiu em jogo de trilha e teve como objetivo compreender as operações algébricas como operadores. Cada casa da trilha tinha uma expressão algébrica como operador que determinava a quantidade de casas a andar. Os grupos compreenderam que as expressões eram os operadores e a dificuldade se concentrou no cálculo algébrico.

A quinta e última atividade desenvolvida, denominada "Fração como operador", teve como objetivo compreender as frações como operador multiplicativo. Manipulando as peças do FRAC-SOMA 235, os alunos demonstraram compreensão da fração como operador que transforma um número em outro, assim perceberam o um como operador neutro da multiplicação.

Percebemos que nas atividades aplicadas, pensar algebricamente foi uma das maiores dificuldades apresentadas pelos alunos, os mesmos, em sua grande maioria, demonstraram dificuldades em representar as situações utilizando os símbolos (uso das letras) e suas devidas operações. Kaput (2008 p.10) justifica que o pensamento algébrico envolve (a) fazer e expressar generalizações em sistemas de símbolos cada vez mais formais e convencionais, e (b) raciocinar com formas simbólicas.

Silva e Rezende (1999, p.31) sinalizam que ao longo da história os matemáticos definiram o conceito de função utilizando as ideias de relação entre quantidades variáveis, relação entre conjuntos e a ideia de transformação.

Nesta pesquisa trabalhamos com a ideia de transformação via operador e ao concluir esse estudo, acreditamos ter respondido à questão de pesquisa apresentada. Podemos afirmar que ficou muito claro para os alunos o entendimento do operador como agente responsável pela transformação. Neto e Rezende (1998) apontam que interpretar o conceito de função sob o aspecto de transformação é justamente a forma mais “sofisticada”, pois é dessa maneira que as funções são vistas em disciplinas do Ensino Superior. Concordamos com essa ideia e, a partir das atividades desenvolvidas, acreditamos que trabalhar o conceito de função sob o aspecto de transformação, via operador funcional, seja favorável ao aprendizado dos alunos.

O tema funções é bastante amplo e leva tempo para que o conceito seja compreendido pelos alunos; entendemos assim que as demais interpretações do conceito de função também devam ser desenvolvidas. Quanto às ideias de relação entre quantidades variáveis, Silva e Rezende (1999, p.31) apontam que “essa interpretação tem um caráter dinâmico e que mostra, de imediato, a utilidade prática desse conceito”, podendo ser utilizado no cálculo de área ou perímetro de um quadrado que varia de acordo com a medida do lado, por exemplo. Por esse ponto de vista, acreditamos que desenvolver o conceito de função sob a ideia de relação entre quantidades variáveis é importante na faixa etária dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Quanto à interpretação utilizando e de relação entre conjuntos, Silva e Rezende (1999, p.32) apontam que essa maneira tem um caráter mais formal e também mais estática, sendo mais difundida nos meios acadêmicos, o que talvez traria maior dificuldade de compreensão por parte dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Entendemos que o conceito de função está em constante desenvolvimento e pode ser compreendido sob diferentes interpretações. Nosso intuito, nessa pesquisa, foi apresentar mais uma possibilidade a fim de dar significado a esse conceito tão importante.

REFERÊNCIAS

BALDINO, R. R. **Frac-Soma 235**: significantes manipuláveis. Registrado na Biblioteca Nacional, Rio de Janeiro, sob o nº 30262 em 2 de abril de 1984.

BALDINO, Roberto Ribeiro. Grupos de pesquisa-ação em Educação Matemática, **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 14, n. 15, p. 83-103, 2001. Disponível em https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10626. Acesso em: 17 dez. 2022.

BASTOS, A. B. B. I. A técnica de grupos-operativos à luz de Pichon-Rivière e Henri Wallon. **Psicol inf.**, São Paulo, v. 14, n. 14, p. 160-169, out. 2010. Disponível em: http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1415-88092010000100010&lng=pt&nrm=iso. Acesso em: 22 jan. 2022.

BLANTON, M. *et al*. The development of children's algebraic thinking: the impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. **Mathematics Education**, [*s.l.*], v. 46, n. 1, 2015. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/10.5951/jresematheduc.46.1.0039. Acesso em: 13 jan. 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC; SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em :17 jul. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ . Acesso em 17 jul. 2022.

CABRAL, T.; PAIS, A.; BALDINO, R. Mathematics education's solidarity assimilation methodology. **Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**, Utrecht, Netherland, 2019. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02421239/. Acesso em: 13 dez. 2020.

CABRAL, T. B. **Epistemology of mathematical education in engineering**: building bridges between calculus and engineering. Site. Disponível em: https://cabraldinos.mat.br/category/projects/. Acesso em: 20 mar. 2022.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. In: Quadrante, v. VXI, n. 2. Portugal, 2007. Disponível em https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4301/1/_Quadrante_vol_XVI_2-2007-pp000_pdf081-118.pdf. Acesso em: 02/06/2023.

CARAÇA, Bento Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARRAHER, D. W.; SCHILEMANN, A. D. Empirical and logical truth in early algebra activities: from guessing amounts to representing variables. *In*: SYMPOSIUM PAPER NCTM 2002 RESEARCH PRESESSION, Las Vegas, Nevada, abril 2002. **[Anais...]**. Las Vegas, Nevada: [*s.n.*], 2002. Disponível em: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/publications.asp. Acesso em: 6 jan. 2021.

CARRAHER, D. W.; SCHILEMANN, A. D. Cultivating early algebraic thinking. *In*: KIERAN, C. (org.). **Theaching and learning algebraic thinking with 5- 12 years olds**: The global evolution of an emerging field of research and practice. Montreal, Canadá: Springer, 2018. p. 107-138.

CARRAHER, D. W. *et al*. Arithmetic and algebra in early mathematics education. **Journal for Research in Mathematics Education**, [*s.l.*], v. 37, n. 2, p. 87-115, 2006. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/30034843. Acesso em: 14 jan. 2022.

CHEVALLARD, Yves. **La Transposición Didáctica:** Delsaber sábio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1991.

CLEMENT, L. What do students really know about functions? **Mathematics teacher**, [*s.l.*], v. 94, n. 9, p. 745-748, dez. 2001. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/20870866. Acesso em: 12 jan. 2022.

COIRO, Luciano B. **Simuladores comoo objeto educacional associado a uma prática pedagógica na educação matemática.** 2022. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado profissional em Formação Docente para Ciências, Tecnologias, Engenharia e Matemática, Universidade Estadual do Rio Grande do Sul, Guaíba, 2022. Disponível em https://proppg.uergs.edu.br/mestrados/ppgstem/publicacoes-do-mestrado. Acesso em 5 jun 2023.

COSTA, C. B. J. **O conhecimento do professor de matemática sobre o conceito de função**. Rio de Janeiro: [*s.n.*], 2008.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 24, n. 38, p. 97-126, abr. 2011. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/847. Acesso em: 11 jan. 2022.

DREYFUS, Tommy. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall D. (eds) **Advanced Mathematical Thinking**. Mathematics Education Library, vol 11. Kluwer Academics Publishers, Ney York, Boston, Dordrecht, London, Moscow. 2002. Cap. 2, p. 25 – 41. E Book ISBN 0306472031.

HENRIQUES, A. C. C. B. **O Pensamento Matemático Avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de atividades de investigação**. 2010. Tese (Doutorado) - Curso Didáctica da Matemática, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/2465/1/ulsd059643_td_Ana_Henriques.pdf. Acesso em: 10 out. 2022.

IGLIORI, S. C. B.; ALMEIDA, M. V. Educação matemática no ensino superior e abordagens de Tall sobre o ensino: aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 718-734, 2013. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/17617/pdf. Acesso em: 12 out. 2022.

IVIC, I.; COELHO, E. P. (org.). **Lev Semionovich**. Recife: Fundação Joaquim Nabuco; Editora Massangana, 2010.

GOLBERT, C. S. **Novos rumos da aprendizagem da matemática**. São Paulo: Mediação, 2002.

KAPUT, J. J. What is algebra? What is algebraic reasoning? *In*: KAPUT, J. J. *et al*. (ed.). **Algebra in the early grades**. New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 5–17.

KAPUT, J. J. Teaching and Learning a New Algebra. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A.(ed.). Mathematics Classrooms That Promote Understanding. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1999. cap. 8, p. 133 – 155. ISBN 085830278.

KIEREN, T. E. (ed.). **Recent Research on Number Learning**. Columbus, Ohio: [*s.n.*], 1980. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED212463.pdf. Acesso em: 17 jul. 2022.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. *In*: LESH, R. (ed.) **Number and measurement**: papers from a research workshop.Columbus, Ohio: Eric/Smeac, 1976. p. 101-144. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED120027.pdf. Acesso em: 17 jul. 2022.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e Álgebra para o século XXI**. São Paulo: PAPIRUS, 1997.

LÜDKE, M.; ANDRE, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: Abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MINAYO, M. C. S.; DESLANDES, S. F.; GOMES, R. **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes, 1994.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A. Fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 23-40, 2008. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2104. Acesso em: 17 jul. 2022.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa**: a teoria e textos complementares. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, M. C. C. A teoria dos subconstrutos e o número racional como operador: das estruturas algébricas às cognitivas. **Bolema**, Rio Claro, Ano 21, n. 31, 2008, p. 103-127. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/2912/291221883007.pdf. Acesso em: 21 out. 2020.

FERREIRA NETO, T. A. Q.; REZENDE, W. M. Interpretações do conceito de função. **Caderno Dá Licença**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 1, ed. 1, 1998. Disponível em: http://dalicenca.uff.br/projetos/caderno/. Acesso em: 6 jan. 2022.

OPERATOR. **Encyclopedia of Mathematics**. 2020. Disponível em: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Operator&oldid=44339-**.** Acesso em: 2 nov. 2020.

PICHON- RIVIÈRE, Enrique. **O processo grupal**. 8. Ed. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2009.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de Matemática. **Educação e Matemática**. n 15 p. 3-9.1990. Disponível em `http://hdl.handle.net/10451/4473.`
Acesso em 10 jan. 2022.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação de Portugal, 2009.

POWELL, A.; BAIRRAL, M. **A escrita e o pensamento matemático**: interações e potencialidades. São Paulo: Papirus Editora, 2014. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

REZENDE, W. M. **Objetos de aprendizagem para o ensino de funções reais**: Uma contribuição para o saber pedagógico de conteúdo do professor de matemática. São Paulo Encontro nacional de Educação Matemática. Jul. 2016. Disponível em http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6212_2631_ID.pdf. Acesso em 25 jun. 2022.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor**: explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

ROCHA, M. L.; AGUIAR, K. F. Pesquisa-Intervenção e a produção de novas análises.

Psicologia: Ciência e Profissão. v. 23, n 4 p. 64-73, dez. 2003. Disponível em:

https://doi.org/10.1590/S1414-98932003000400010. Acesso em 16 dez. 2022.

SADOVSKY, P. **O ensino de matemática hoje**: Enfoques, sentidos e desafios. São Paulo: Ática, 2010.

SILVA M. H. M.; REZENDE, W. M. Análise Histórica do Conceito de Função. **Caderno Dá Licença**, Rio de Janeiro, v. 2, n. ,2 ed. 1, 1999. Disponível em: http://dalicenca.uff.br/projetos/caderno/. Acesso em: 6 jun. 2023.

SLAVIN, R. E. Research on cooperative learning and achievement: What we know, what we need to know. **Contemporary educational psychology**, v. 21, n. 1, p. 43-69, 1996. Disponível em: https://scholar.google.com.br/scholar?q=Research+on+Cooperative+Learning+and+Achievement:+What+We+Know,+What+We+Need+to+Know&hl=pt-BR&as_sdt=0&as_vis=1. Acesso em: 21 jan. 2022.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.;MILANI, E. **Cadernos do Mathema**: jogos de matemática 6º a 9º ano. Porto Alegre: Artmed, 2007.

TALL, D. The Psicology of Advanced Mathematics Thinking. In: Tall D. (eds) **Advanced Mathematical Thinking**. Mathematics Education Library, vol 11. Kluwer Academics Publishers, Ney York, Boston, Dordrecht, London, Moscow. 2002. Cap. 1, p. 3 – 21. E Book ISBN 0306472031.

TALL, D. O. Differing modes of proof and belief in Mathematics. *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICS: UNDERSTANDING PROVING AND PROVING TO UNDERSTAND, 2002, Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University. **[Anais…]**. Taiwai: [*s.n.*], 2002. p. 91–107. Disponível em: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002k-proof-3worlds.pdf. Acesso em: 12 out. 2022.

THIOLLENT, M. **Metodologia de pesquisa-ação**. São Paulo: Cortez, 1986.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.

VIGOTSKI, L. S. **A Construção do pensamento e da linguagem**. 2. ed. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2009.

______. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ZABALA, Antoni. **A Prática Educativa**: Como ensinar.Tradução de Ernani F. da F. Rosa; revisão técnica: Nalu Farenzena. Porto Alegre: Penso. 2014.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. O Conceito de Função e sua linguagem para os professores de Matemática e de Ciências. **Ciência e Educação**, v. 8, n.1, p. 1-12, 2002.

PHET. **Interactive Simulations da Universidade do Colorado**. 2016. Site. Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/function-builder-basics. Acesso em: 31 jan. 2022.

APÊNDICE A

O PRODUTO EDUCACIONAL

CONSTRUINDO SIGNIFICADOS PARA O CONCEITO DE FUNÇÃO POR MEIO DO CONCEITO DE OPERADOR

Construindo significados para o Conceito de Função por meio do Conceito de Operador

Descrição

Produto educacional produzido como requisito parcial para a conclusão do Mestrado Profissional em Docência para Ciências, Tecnologias, Engenharia e Matemática da Universidade Estadual do Rio Grande do Sul- PPGSTEM

Orientadora
Prof. Dra. Tânia Cristina Baptista Cabral

Mestranda
Clarice Caciani Taube
cacitaube@gmail.com

2023

Apresentação

Como docente, percebo dificuldades dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental na compreensão dos conteúdos relacionados com a Álgebra e a conceitos primordiais para o pensamento funcional. Após ingressar no Mestrado, a convite da professora orientadora, comecei a participar dos encontros no Grupo de pesquisa-ação GPA-Remoto, grupo esse em que os professores pesquisam sua própria sala de aula. Nesses encontros, professores do ensino superior têm discutido a dificuldade dos alunos para lidar com o conceito de operador.

Lendo alguns trabalhos, como Henriques (2010), foi sinalizado que a falta de compreensão por parte dos alunos em conceitos elementares compromete a aprendizagem de conceitos mais complexos e isso pode gerar motivo de insucesso para muitos alunos. Problema semelhante também é apontado por Cabral (2022), que pesquisa a descontinuidade na passagem do ensino básico para o ensino superior. Segundo a pesquisadora, alunos de disciplina de Cálculo acabam desistindo do curso porque além das dificuldades inerentes à disciplina, esses estudantes trazem consigo grandes lacunas de aprendizagem referentes aos conceitos básicos da Matemática.

Diante dessas inquietações, me propus a realizar uma pesquisa em uma turma do 9º ano, que trouxesse uma abordagem do conceito de função por meio do operador funcional.

Nesse material, apresento atividades que envolvem o conceito de função sob o aspecto de transformação via operador funcional, que podem ser trabalhadas no ensino fundamental ou médio.

Esse material é uma proposta que pode ser trabalhada em uma sala da aula com o devido cuidado de que o professor esteja atento para os seus alunos, pois eles é que definirão as modificações e adaptações necessárias.

Boa leitura!

Atividade: Operadores que transformam

Essa atividade é realizada por meio do construtor de funções no simulador Phet Colorado[20].

O objetivo é compreender a ideia de transformação de determinada entrada em uma máquina, identificar a entrada, saída e o operador responsável por essa transformação, bem como descrever as mudanças ocorridas (mudanças de tamanho, forma, orientação etc.).

Objetivos;

Materiais necessários;

Dispositivo com acesso ao simulador;

Link para o acesso: https://phet.colorado.edu/en/simulation/function-builder-basics

Caderno;

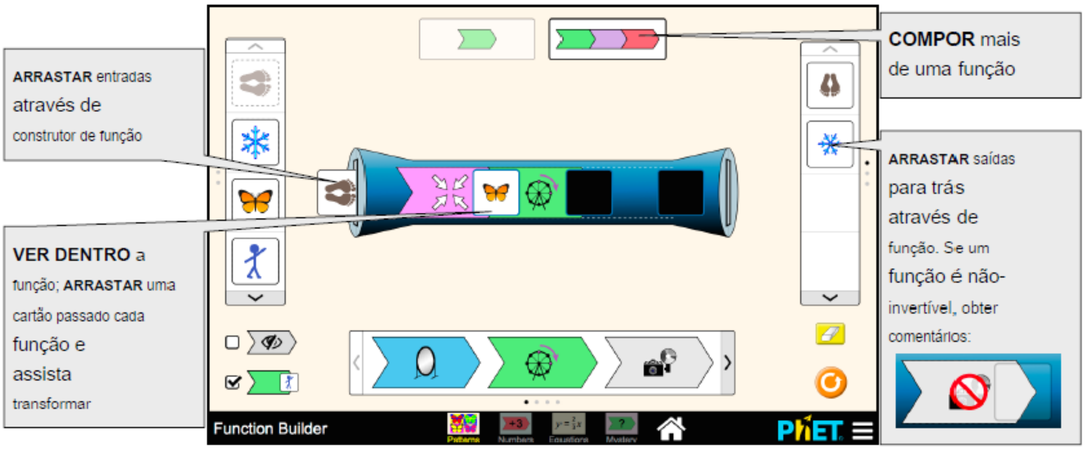
Projetor;

Procedimentos:

- Dividir a turma em grupos de 5;
- Apresentar o simulador;
- Realizar as atividades;

Apresentar aos alunos o modo de operação do simulador.

Simulador: Tela padrão.



Fonte: Phet Colorado[21].

[20] Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/function-builder. Acesso em: 11 nov. 2022.

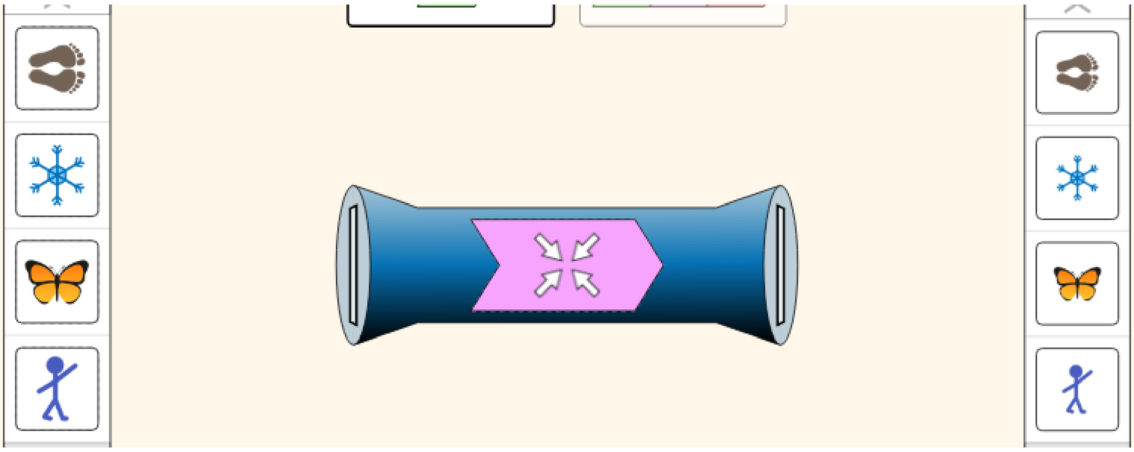
[21] Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/function-builder. Acesso em: 11 nov. 2022.

Questão 1. Explorar a simulação do Function Builder por alguns minutos, construir as funções que escolher. Anotar de uma a três observações sobre a construção de uma função.

____

____

Questão 2. Rotule as partes desta função: entrada, saída, regra da função.



Questão 3. Faça uma captura de tela de cada imagem depois de passar pelo operador e registre na tabela. Descreva o que acontece com as imagens depois que elas passam pelo operador. Nomeie o operador.

Registre na tabela:

		ENTRADAS				SAÍDAS	
						Você notou alguma mudança?	Nomeie o operador.
OPERADORES							

Questão 4. Com suas próprias palavras, com base em suas observações da tabela, escreva o que você compreendeu referente à função do operador (na sua explicação tente usar as palavras entrada, saída, operador, relacionado/relacionamento).

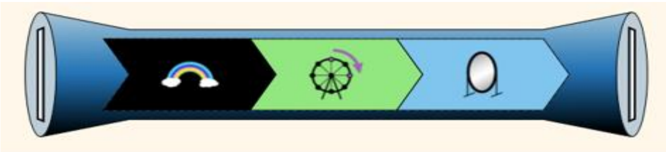
Questionamentos:

____

____

____

Questão 5. Com base na sua definição, crie uma previsão do que acontecerá se você passar a borboleta pelos seguintes operadores:



a) Previsão:____

____

b) Verifique sua previsão alimentando a borboleta pelo operador. Clique no botão verde e registre as etapas pelas quais a imagem passa abaixo.

Caixa 1:

Caixa 2:

Caixa: 3

Fim:

Questão 6. Clique na guia "Mistério" na parte inferior da página.

1. Clique na opção de dois operadores na parte inferior da página.
2. Coloque pelo menos três entradas nos operadores misteriosos e descubra quais são as saídas.
3. Grave sua resposta.
4. Confira sua resposta clicando no botão do olho abaixo dos operadores e registre.

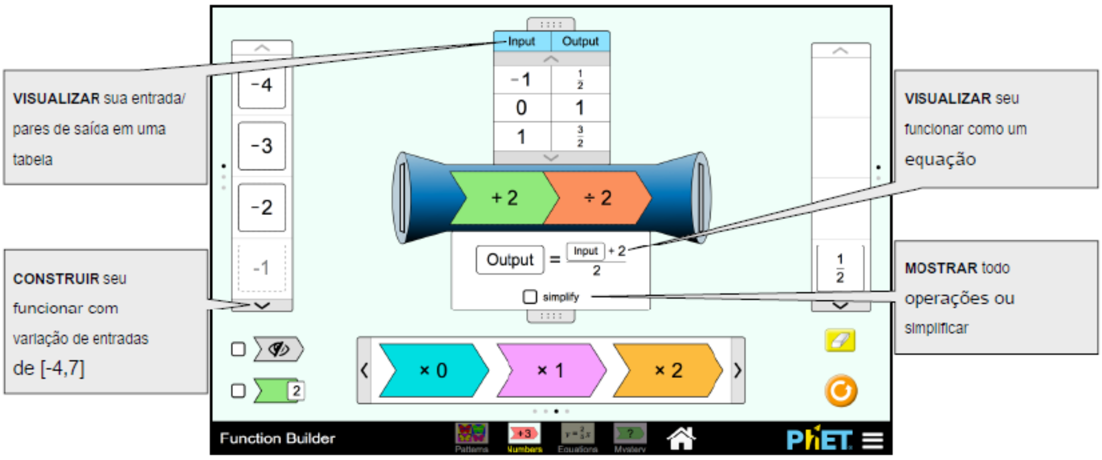
	Operador Misterioso 1	Operador Misterioso 2	Operador 1	Operador 2
Executar 1				
Executar 2				
Executar 3				

Como você descobriu qual era o operador? O que você notou sobre as saídas?

Atividade: Descrevendo operadores

Essa atividade também é realizada no simulador Phet Colorado[22]. O objetivo é descrever o operador responsável pelas transformações de um grupo de entradas, para determinar a saída; prever saídas de um determinado operador, usando uma determinada entrada e construir operadores para criar uma nova função. Essa atividade é composta de três tarefas: utilizando a tela numérica, a tela equação e a tela misteriosa.

1ª parte: Tela numérica.



Fonte: Phet Colorado[23].

Demonstrar o acesso e disponibilizar que os alunos interajam com o simulador. Pode-se fazer um levantamento quanto às semelhanças e diferenças do simulador básico bem como da tela numérica.

Apresentar o funcionamento com operações básicas, a fim da compreensão do resultado de saída.

Procedimentos:

- Explore como construir diferentes totais usando a máquina. A máquina adiciona, subtrai, multiplica ou divide um número para resultar em outro.

[22] Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/function-builder. Acesso em: 11 nov. 2022.
[23] Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/function-builder. Acesso em: 11 nov. 2022.

Questão 1. Sem inserir “operadores”, arraste alguns valores de entrada e solte na máquina. Descreva os resultados para cada tentativa, comparando os números inseridos na máquina com os números de saída.

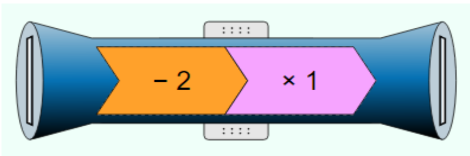
Valor de entrada	Valor de saída

Questão 2. Usando os “operadores”, selecione uma opção e solte-a na máquina. Arraste alguns números dos valores da entrada para a máquina. Registre os valores na tabela para cada tentativa e compare os valores da entrada com os da saída.

Valor de entrada	Operador	Valor de saída

Questão 3. Repita o processo selecionando as diferentes operações disponíveis.

Questão 4. Selecione uma opção de operador com duas operações, como por exemplo:



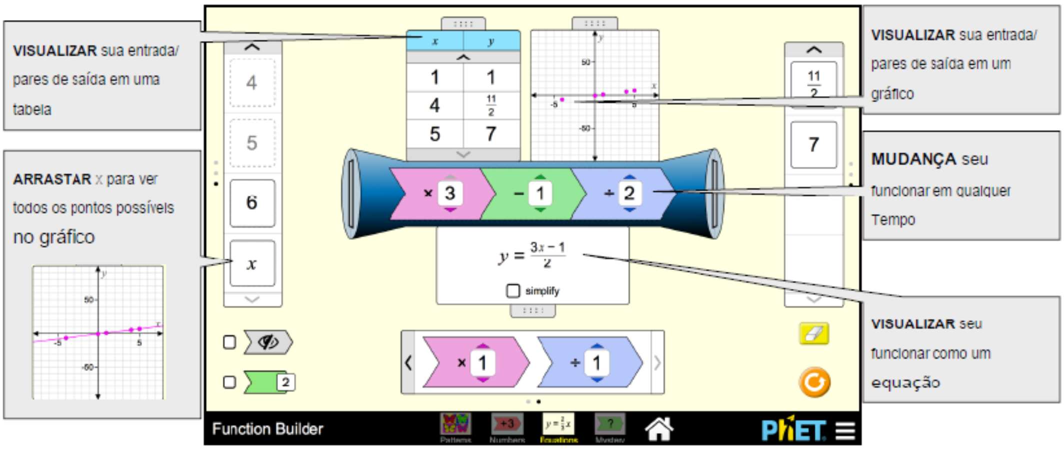
Arraste alguns números dos valores da entrada para a máquina. Registre os valores na tabela para cada tentativa e compare os valores da entrada com os da saída.

Valor de entrada	Operador	Valor de saída

Qual é a função da sua máquina? Como você sabe?

____

2ª Parte: Tela equação.



Fonte: Phet Colorado[24].

Explore o simulador para melhor apropriação do mesmo.

Questão 1. Arraste e solte seus valores de entrada na máquina. Registre na tabela. Compare os números de entrada e saída para determinar qual é a função da sua máquina.

Valor de entrada	operadores (função que a máquina exerce)	Valor de saída

Questão 2. Crie uma regra para descrever a função que a sua máquina exerce. Explique por que você escolheu isso, com evidências para apoiar sua afirmação.

Regra:____

____

Explicação:____

____

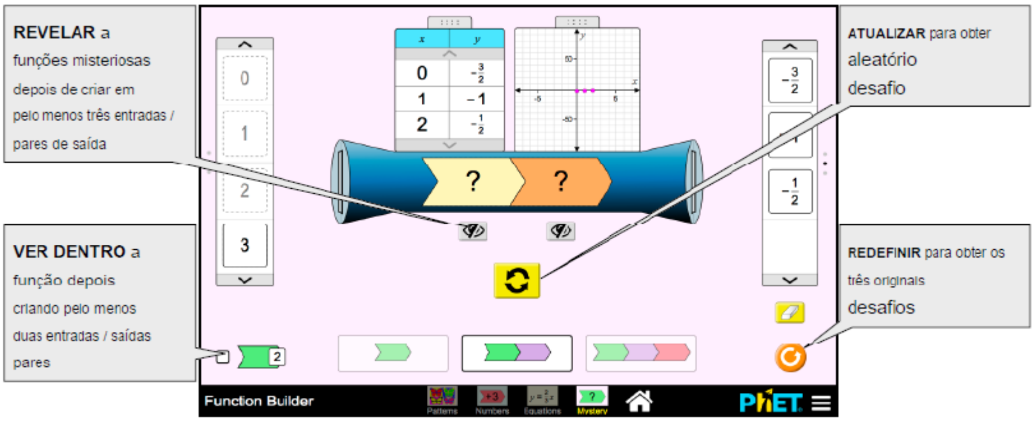
____

Questão 3. Agora seu grupo deve expor ao grande grupo as estratégias utilizadas para determinar o resultado.

3ª parte: Tela Misteriosa

[24] Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/function-builder. Acesso em: 11 nov. 2022.

A tela Misteriosa desafia você a descobrir a função gerada.



Fonte: Phet Colorado[25].

Questão 1. Vocês devem determinar a função oculta, por meio da análise dos resultados obtidos. Como auxílio, vocês podem utilizar a tela de Equações como recurso, construindo equações, testando e modificando até determinar os operadores que correspondem à função misteriosa.

Questão 2. Tomem nota das suas estratégias utilizadas para obter o resultado.

É interessante sugerir aos alunos que façam a atividade com um, dois e três operadores. Eles podem substituir as palavras entrada e saída por símbolos que os represente.

Os grupos devem formular a frase que descreve a função misteriosa, utilizando as palavras entrada e saída e após representar a frase com uma equação.

Sugestão para registro:

Utilizando **um** operador misterioso:

Entrada (x)	Saída (y)

Descrevendo a função misteriosa: ____

____

Equação: ______________________

Utilizando **dois** operadores misteriosos:

[25] Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/function-builder. Acesso em: 11 nov. 2022.

Entrada (x)	Saída (y)

Descrevendo a função misteriosa: ____

____

Equação: ______________________

Utilizando **três** operadores misteriosos:

Entrada (x)	Saída (y)

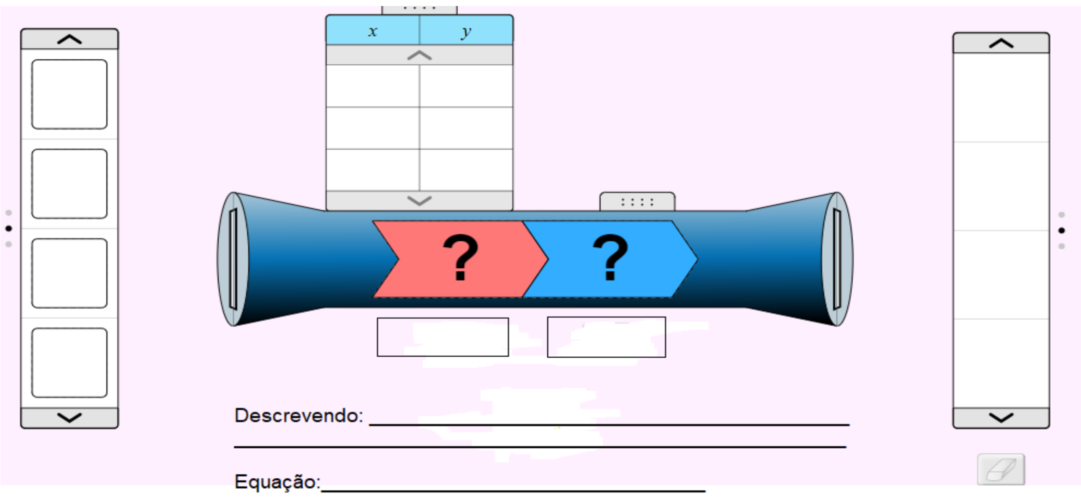
Descrevendo a função misteriosa: ____

____

Equação: _____________________

Questão 3. Agora, seu grupo deverá elaborar uma equação com operadores ocultos como desafio para os outros grupos.

Sugestão para registro:



Atividade - Desvendando operadores

Essa atividade é realizada por meio de um jogo. Esse jogo foi adaptado do jogo Mestre e adivinho (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 93-96).

O objetivo é estabelecer relações entre a linguagem em prosa e a linguagem algébrica simbólica (fonemas e grafemas); perceber as operações algébricas como operadores funcionais.

Organização da turma: grupos de quatro alunos

Materiais: Conjunto de 12 tiras para cada grupo

Regras do jogo:

1. Decide-se quem começa;
2. As frases são embaralhadas e cada jogador recebe uma frase, que deverá ser descoberta pelos demais jogadores do grupo;
3. Em cada jogada, um dos participantes será o *Mestre*;
4. Cada jogador do grupo fala um número e o jogador com a frase, chamado de *Mestre*, deve operar com esse número o que a frase indicar. A descoberta se fará por meio da análise das respostas dadas por quem tem a frase nas mãos, ou seja, o *Mestre*;
5. Se nenhum dos jogadores descobrir a frase, depois de cada um ter dito um número, os jogadores podem dizer mais um número para o *Mestre.*
6. As frases são usadas apenas em uma jogada, ou seja, depois que o jogador descobriu a frase, ela não será devolvida ao monte;
7. Os números ditos e a frase devem ser anotados na folha de registro por todos os participantes do jogo;
8. Em cada jogada, ganha um ponto o jogador que primeiro descobrir a frase e escrever a expressão correspondente;
9. Ganha o jogo o jogador que tiver mais pontos.

Sugestões de frases:

Indique o sucessor do número.	Indique dez vezes o número.
Indique o triplo do número, mais um.	Indique o quadrado do número, mais um.
Indique o número mais cinco unidades.	Indique o número multiplicado pelo seu sucessor.
Indique o dobro do número, menos um.	Indique quatro vezes o número, menos um.
Indique quatro vezes o número.	Indique o oposto do número.
Indique o quadrado do número.	Indique o número mais três unidades.

Outras frases:

Indique o oposto do número, mais um.	Some o número com um e indique o quadrado deste resultado.
Subtraia o número de cem.	Indique o quadrado do número, menos dois.
Multiplique o número por cinco e some um ao resultado	Multiplique o número por quatro e some dois ao resultado.
Indique o triplo do número, menos um.	Indique o triplo do número.
Indique dez vezes o número e subtrai dois do resultado.	Indique o dobro do sucessor do número.
Indique o número multiplicado por seis.	Indique o cubo do número.

Sugestão de registro:

Número dito	Número respondido

a) Operador em palavras:

____

____

b) Operador como expressão algébrica:

____

2. Após jogarem algumas vezes o jogo:

a) Propor aos alunos o relato verbal e escrito sobre o jogo.

b) Sugerir que os grupos criem frase (operadores) que serão utilizados para jogar novamente, com as mesmas regras.

3. Propor problemas para buscarem o operador e expressarem generalidade:

a. Número dito:	4	6	10	15	3
Número respondido:	2	4	8	13	1

Operador em palavras: ____

Operador como expressão algébrica: ______________________________________

b. Número dito:	2	6	1	12	7
Número respondido:	5	17	2	35	20

Operador em palavras: ____

Operador como expressão algébrica: ______________________________________

c. Número dito:	1	2	4	5	9
Número respondido:	2	6	12	30	90

Operador em palavras: ____

Operador como expressão algébrica: ______________________________________

a) Propor que a partir da exploração das frases, da tabela a ela correspondente e dos campos numéricos que podem ser usados para escolher o número dito, eles construam gráficos.

Pode se entregar malha quadriculada para facilitar a construção dos gráficos.

Atividade: Jogo Corrida de operadores.

Essa atividade consiste de um jogo e tem como objetivo compreender as operações algébricas como operadores. Cada casa do tabuleiro representa o operador (expressão algébrica de uma função) e as cartas representam as entradas (conjunto domínio).

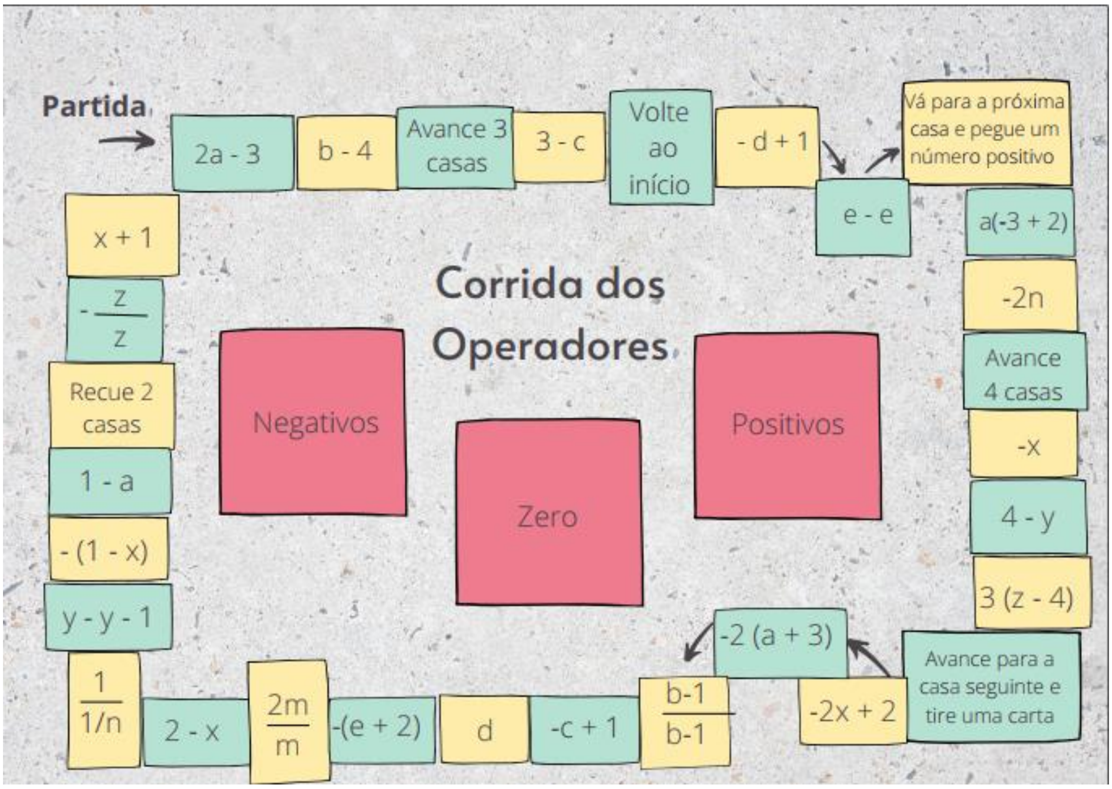
Este jogo foi adaptado do jogo Corrida de obstáculos **(**SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 85-90)

Organização da turma: grupos de quatro alunos.

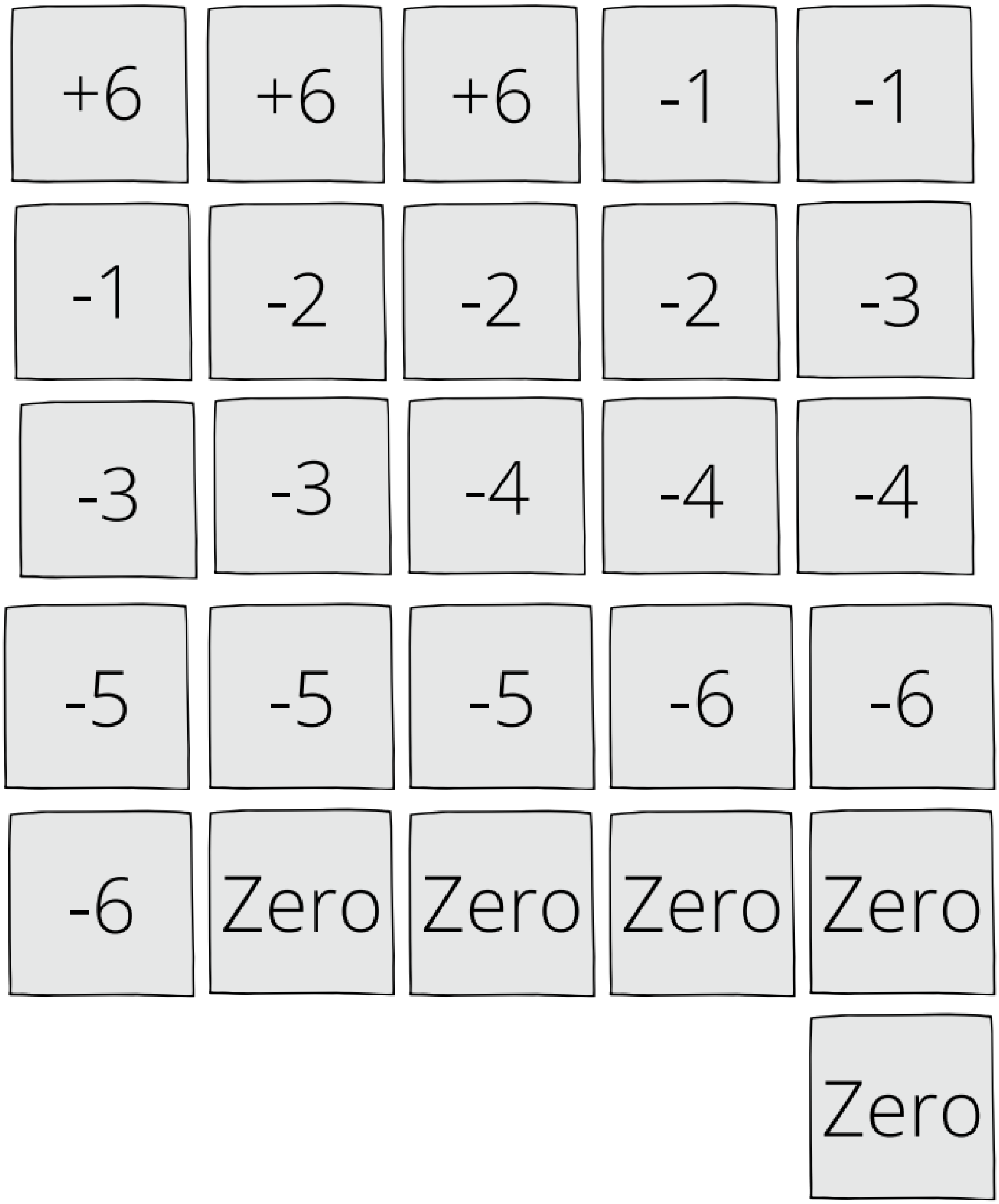
Recursos: Para cada grupo, são necessários: 1 tabuleiro; marcadores diferentes; 1 dado; 18 cartas com números positivos, sendo 3 cartas de cada um dos seguintes valores: +1, +2, +3, +4, +5, +6; e 18 cartas de números negativos, sendo t3 cartas de cada um dos seguintes valores: -1, -2, -3, -4, -5, -6 e 5 cartas zero.

Regras:

1. As cartas são embaralhadas e colocadas nos respectivos lugares do tabuleiro viradas para baixo;
2. Os jogadores posicionam seus marcadores sobre o tabuleiro no ponto de partida;
3. Cada jogador, na sua vez, lança o dado e avança o número de casas igual ao número obtido no dado e retira uma carta de um dos montes à sua escolha;
4. Efetuam-se os cálculos e o resultado obtido indica o valor e o sentido do movimento. Se for positivo, avança o número de casas correspondentes ao número obtido. Se for negativo, recua o número de casas correspondentes ao número obtido. Se for zero, não se desloca;
5. Se o marcador cair em uma casa que contenha uma instrução, o jogador deverá executá-la nessa mesma jogada;
6. Sempre que o jogador escolher um número que anule o denominador da expressão, deverá voltar à casa de partida;
7. O vencedor é o jogador que completar em primeiro lugar duas voltas no tabuleiro;
8. Caso um dos três montes de cartas esgote-se antes do final do jogo, então as respectivas cartas devem ser embaralhadas e recolocadas no tabuleiro.



+1	+1	+1	+2	+2
+2	+3	+3	+3	+4
+4	+4	+5	+5	+5



Depois que os alunos jogaram pelo menos duas vezes, você poderá propor algumas questões como:

– Se o seu marcador estiver na casa 3 - c, de que monte você deve retirar uma carta, para poder avançar?

– De que monte devo retirar uma carta se o meu marcador está na casa 3 (z - 4)?

– O que acontece quando o marcador está na casa $\frac{+2m}{m}$ ou na casa $\frac{-z}{z}$?

Os grupos podem fazer o registro escrito do jogo, relatando as dificuldades encontradas e o entendimento que tiveram.

Atividade: Fração como operador

Objetivo: Compreender as frações com o significado de operador multiplicativo, ou seja, um multiplicador de uma quantidade indicada.

Utilizar as peças do FRAC-SOMA 235 **com a função de operador multiplicativo.**

Fonte: Frac-Soma 235: significantes manipuláveis, criado por Robert Baldino e registrado na Biblioteca Nacional, Rio de Janeiro, sob o nº 30262 em 2 de abril de 1984.

O FRAC-SOMA 235 consiste em barras de mesmo tamanho, 60 centímetros, que são divididas em peças congruentes, com divisores múltiplos de 2, 3 e 5. O jogo completo é formado com as seguintes peças:

- 1 barra branca com 60 centímetros, a unidade;
- 2 peças vermelhas de tamanho 30 cm, (a unidade em duas partes);
- 3 peças amarelas com 20 cm (a unidade em 3 partes);
- 4 peças vermelhas com 15 cm (a unidade em 4 partes);
- 5 peças azuis com 12 cm (a unidade em 5 partes);
- 6 peças laranja com 10 cm (a unidade em 6 partes);
- 8 peças vermelhas com 7,5 cm;
- 9 peças amarelas com aproximadamente 6,67 cm;
- 10 peças roxas com 6 cm;
- 12 peças laranja com 5 cm;
- 15 peças verdes com 4 cm;
- 16 peças vermelhas com 3,75 cm;
- 18 peças laranja com aproximadamente 3,33 cm;
- 20 peças roxas com 3 cm;
- 24 peças laranja com 2,5 cm;
- 25 peças azuis com 2,4 cm;
- 27 peças amarelas com aproximadamente 2,22 cm;
- 30 peças pretas com 2 cm cada.

Totalizando, 235 peças que fazem parte do nome do material.

Ficha de Trabalho 1- FT1

1) Observe as peças do FRAC-SOMA e identifique que parte da unidade (fração) corresponde cada barra a seguir:

Branca (BR): ________________________ Vermelha (VM1): ______________________

Amarela (AM1):_______________________ Vermelha 2 (VM2):___________________

Azul (AZ1): ___________________________ Laranja (LA1): _____________________

Vermelha 3 (VM3):___________________ Amarelo 2 (AM2): ____________________

Roxo 1 (RX1): ________________________ Laranja 2 (LA2): __________________

Verde (VD): ________________________ Vermelho 4 (VM4):_____________________

Laranja 3 (LA3): _____________________ Roxo 2 (RX2): ______________________

Laranja 4 (LA4):______________________ Azul 2 (AZ2):_______________________

Amarelo 3 (AM3): _____________________ Preto (PR): _______________________

2) Tome uma peça VM1 e suponha que ela seja uma espécie varinha mágica que tenha a propriedade de, ao tocar outra peça, dividi-la em duas partes iguais, retendo uma dessas partes. Exemplo: Quando VM1 toca AM1, produz-se uma peça LA1, que é metade de AM1.

a) Que acontece, então, quando VM1 toca AZ1?

b) E quando toca LA2?

c) E quando toca RX1?

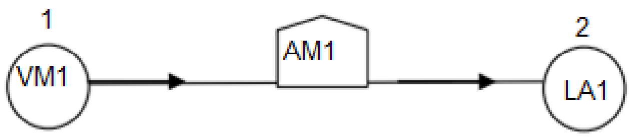
d) A peça AM1 também pode ser considerada como operador?

e) Qual o efeito produzido quando AM1 toca VM1?

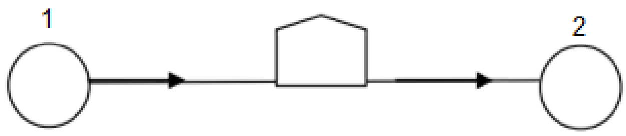
f) As demais peças do FRAC-SOMA 235 também podem ser consideradas como operadores?

g) Que operadores representam o BR?

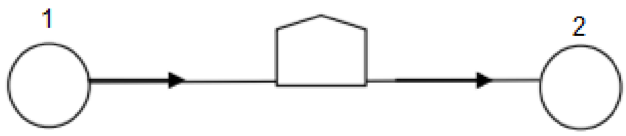
3) Nessa atividade, o diagrama abaixo deverá ser preenchido por peças do FRAC-SOMA 235 de modo que, se a peça dentro da bandeira, considerada como operador, atuar sobre peça que está no círculo 1, o resultado deve ser a peça que está no círculo 2. Por exemplo, pondo AM1 na bandeira e VM1 no primeiro círculo, resulta LA1 no segundo.



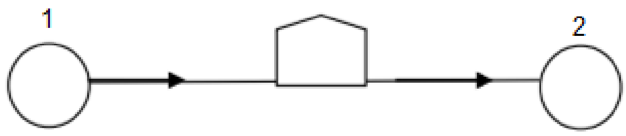
a) Pondo LA1, no círculo 1 e AM1 na bandeja, que peça deve ser posta no círculo 2?



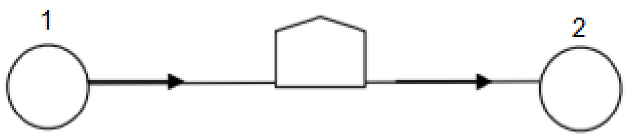
b) Pondo LA1 na bandeira e PR1 no círculo 2, que peça deve ser posta no círculo 1?



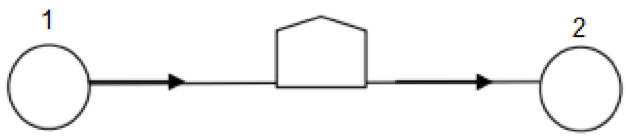
c) Pondo VM2 no círculo 1 e RX2 no círculo 2, que peça deve ser posta na bandeira?



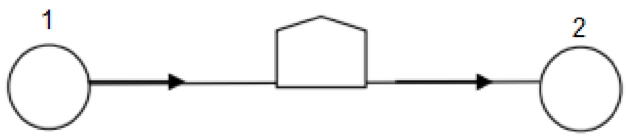
c) Pondo uma peça VM1 no primeiro círculo e duas peças AM1 na bandeira, que peça deve ser posta no segundo círculo?



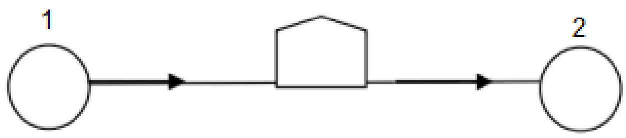
e) Pondo LA1 no círculo 1 e LA4 no círculo 2, que peça deve ser posta na bandeira?



f) Pondo AM2 na bandeira e AM3 no círculo 2, que peça deve ser posta no círculo 1?



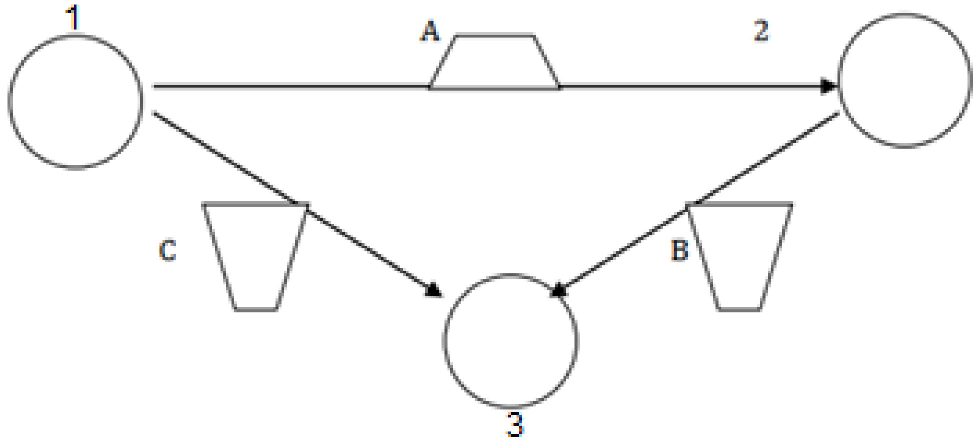
g) Pondo AZ1, no círculo 1 e AM1 na bandeja, que peça deve ser posta no círculo 2?



Após concluir a atividade, é interessante que cada grupo compartilhe com a turma algumas das atividades acima, dizendo como pensaram para resolver. Também podem registrar as frações correspondentes às tiras utilizadas e a partir disso verificar qual operação matemática pode se usada.

Ficha de Trabalho 2 – FT2

1) No diagrama:



Coloque VM1 na bandeira A, AM1 na B e AZ1 no círculo 1.

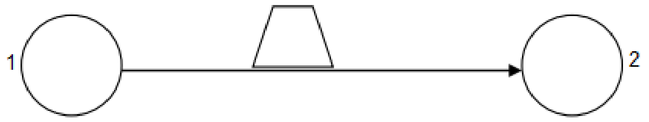
a) Preencha a bandeira e os dois círculos restantes segundo a convenção já utilizada da FT-1. Repita o problema com outras peças. Se necessitar de peças não existentes no FRAC-SOMA 235, escreva a fração correspondente num pedaço de papel e use-o como se fosse a peça que necessita. Não será necessário demonstrar seus resultados a partir do concreto; basta que estejam corretos. Use lápis e papel livremente. b) Quantas posições devem ser preenchidas nesse diagrama para que as demais fiquem bem determinadas?

c) Examine todos os casos possíveis e faça um exemplo de cada um.

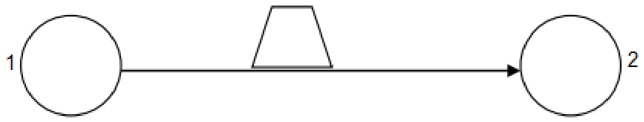
d) É possível mudar o conteúdo dos círculos sem alterar o das bandeiras?

2) Considere novamente o diagrama mais simples:

a) Coloque VM1 no círculo 1 e AZ1 na bandeira. Preencha o círculo 2.

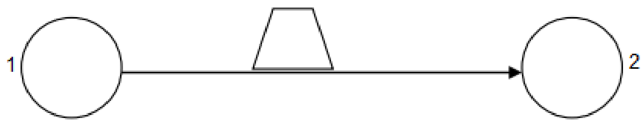


b) Agora, troque os conteúdos do círculo 1 e da bandeira entre si. Preencha o círculo 2.

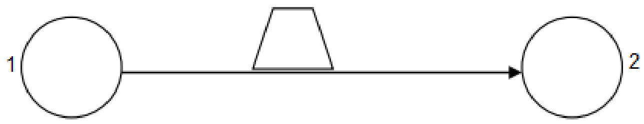


Que conclusão se pode tirar?

c) Coloque, AM1 no círculo 1, VM2 na bandeira e preencha o círculo 2.



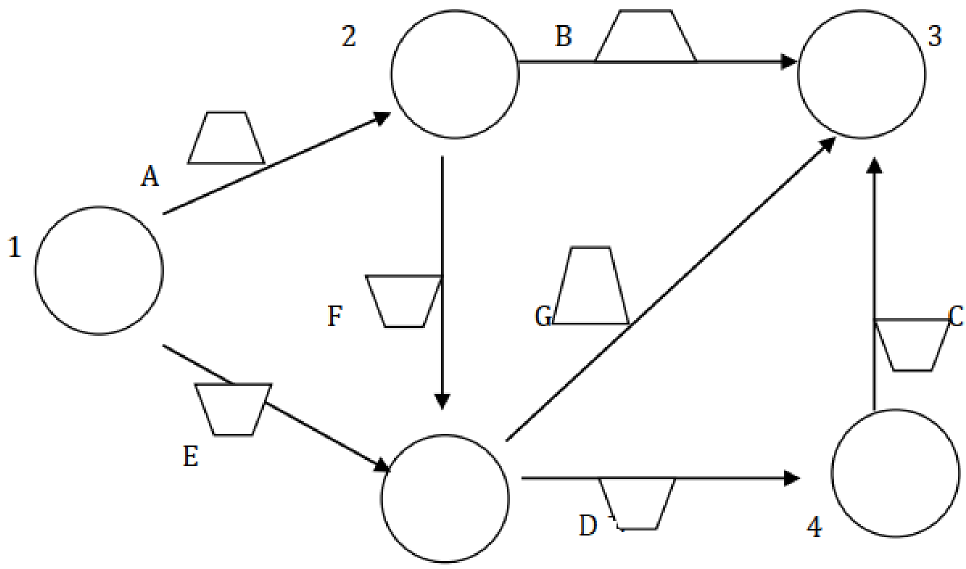
e) Agora, troque os conteúdos do círculo1 e da bandeira entre si e preencha o círculo 2.



Que conclusão se pode tirar?

É sempre possível trocar o conteúdo do primeiro círculo pelo da bandeira e vice-versa sem alterar o conteúdo do segundo círculo?

3) Agora, cada componente do grupo deverá ir preenchendo sucessivamente os círculos e as bandeiras, contíguos aos já preenchidos, até que o diagrama abaixo esteja completamente preenchido.



Sugere-se que após concluir a atividade haja uma conversa com a turma, para ue os alunos possam expressar suas percepções e aprendizados da atividade.

REFERÊNCIAS:

BALDINO, R. R. **Frac-Soma 235**: significantes manipuláveis. Registrado na Biblioteca Nacional, Rio de Janeiro, sob o nº 30262 em 2 de abril de 1984.

CABRAL, T. B. **Epistemology of mathematical education in engineering**: building bridges between calculus and engineering. Site. Disponível em: https://cabraldinos.mat.br/category/projects/. Acesso em: 20 mar. 2022.

HENRIQUES, A. C. C. B. **O Pensamento Matemático Avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de atividades de investigação**. 2010. Tese (Doutorado) - Curso Didáctica da Matemática, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/2465/1/ulsd059643_td_Ana_Henriques.pdf. Acesso em: 10 out. 2022.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.;MILANI, E. **Cadernos do Mathema**: jogos de matemática 6º a 9º ano. Porto Alegre: Artmed, 2007.

PHET. **Interactive Simulations da Universidade do Colorado**. 2016. Site. Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/function-builder-basics. Acesso em: 31 jan. 2022.